EXAM: Matematisk statistik och diskret matematik D (MVE055/MSG810)
Tid och plats: Tisdag den 23 augusti 2011, kl.8.30-12.30, V.
Jour: Jose Sanchez, tel: 0767-683 090.
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare och som mest en (dubbelsidig) A4 sida med egna anteckningar. Tabeller med lämpliga statistiska fördelningar är givna.
Betyg: 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Maximala antalet poäng: 30.
Motivationen: Alla svar ska vara motiverade.
Språk: Det finns en engelsk och en svensk version av frågorna. Du kan skriva dina svar på bägge av dessa två språk.

1. (5p)

   Låt A och B vara två händelser sådana att $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ och $P(A \cup B) = 0.58$.

   a) Vad är definitionen av oberoendet mellan två händelser?
   b) Är A och B oberoende och varför (varför inte)?
   c) Beräkna $P(A \cap B^C)$ och $P(B \setminus A)$.
   d) Ge definitionen för betingad sannolikhet.
   e) Beräkna $P(A|B)$ och $P(B|A)$.

2. (3p)

   Låt X vara utfallet av ett kast av en sexsidig tärning, e. g. X är en stokastisk variabel som antar värden från mängden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Men tärningen är inte rättvis, vi har att sannolikheten att få ett jämnt tal är dubbel så stor som sannolikheten att få ett udda. Sannolikheten att få ett av de udda talen är samma och sannolikheten att ett av de jämna talen är samma.

   a) Beräkna sannolikheten att få ett visst tal.
   b) Vad är $P(X \in 3, 6)$?
   c) Låt oss göra två oberoende kast med denna tärning och summera resultatet. Vad är sannolikheten att få en summa som är större eller lika med 3?

3. (3p)

   Låt X och Y vara två stokastiska variabler med väntevärdena μ_X och μ_Y , varianserna σ_X^2 och σ_Y^2 och kovariansen σ_{XY}.

   a) Hitta väntevärdet av $33X + 12Y - 11$.
   b) Beräkna variansen av $5X + 2Y + 4$.
   c) Om vi dessutom vet att X och Y är oberoende, vad kan vi säga om σ_{XY}?

4. (4p)

   Ett interaktivt datasystem är tillgänglig på en stor inrättning. Låt X vara antalet förfrågningar som tas emot av systemet per timme. Antag att X är Poisson fördelad med parameter λ. Man får följande data:

25	20	20
30	24	15
10	23	4

   Det första och andra momentet för detta dataset är $\bar{X} = 19$ och $\bar{X^2} = 419$.

   a) (2p) Skriv ner definitionen för en väntevärdesriktig skattare och hitta en väntevärdesriktig skattning för λ.

b) Hitta en väntevärdesriktig skattare för den genomsnittliga antalet förfrågningar som tas emot per timme och beräkna dess värde.

c) Hitta en väntevärdesriktig skattare för den genomsnittliga antalet förfrågningar som tas emot på en kvartstimme och beräkna dess värde.

5. (4p)

a) Ge definitionen för den momentgenererande funktionen för en stokastisk variabel X.

b) Beräkna momentgenererande funktionen för en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärde λ.

c) Beräkna momentgenererande funktionen för en Exponentialfördelad stokastisk variabel med väntevärde $\frac{1}{\mu}$.

d) Låt X vara Poisonfördelad med väntevärde λ, Y Exponentialfördelad med väntevärde $\frac{1}{\mu}$ och anta att de är oberoende. Beräkna momentgenererande funktionen för $X + Y$.

6. (3p)

Låt X vara priset för en 3.5 tums diskett. Man har erhållit följande data från ett stickprov av 10 leverantörer.

3.83	3.54	3.44	3.89	3.65
3.70	3.59	3.37	4.04	3.93

Första och andra momentet för datasettet är $\bar{X} = 3.698$ och $\bar{X^2} = 13.71902$.

a) Hitta ett väntevärdesriktig skattare för disketternas medelpris och beräkna dess värde.

b) Hitta ett väntevärdesriktig skattare för variansen av priset och beräkna dess värde.

c) Skatta standardavvikelsen från stickprovet. Är det ett väntevärdesriktig skattning av den sanna standardavvikelsen σ?

7. (4p)

Ett stickprov av 500 arbetare involverade i R&D (Rsearch and Developement) var erhållen föregående år. 178 av dessa tjänade mer än \$72 000 per år. Nuvarande år tog man ett stickprov av 450 arbetare och det visade sig att 220 av dessa tjänar mer än \$72 000 per år.

a) (2p) Låt p_1 och p_2 vara proportioner av arbetare som tjänade mer än 72 000 föregående år respektive detta år. Hitta punktskattningar för p_1, p_2 och $p_1 - p_2$.

b) Hitta ett 95% konfidensintervall för $p_1 - p_2$ (antag att en persons lön detta år är oberoende av lönen föregående år).

c) Skulle du bli överraskad att höra att proportionen av arbetarna som tjänar mer än \$72 000 var samma förra året som detta året? Förklara användningen av konfidensintervallet i b).

8. (4p)

En viss beräkningsmaskin använder bara siffrorna 0 och 1. Det är meningen att den ska överföra en av dessa siffror genom flera faser. Vid varje fas kommer siffran att ändras med sannolikhet p och förbli densamma med sannolikhet $q = 1 - p$.

a) Konstruera en Markovkedja som beskriver överföringsprocessen genom att använda siffrorna 0 och 1 som tillstånd.

b) Skriv ner matrisen av överföringssannolikheter.

c) Man startar maskinen med siffran 1. Skriv ner uttrycket för sannolikheten att vara i tillstånd 1 respektive 0 efter n överföringar.

d) Vad är sannolikheten att en 0 förblir en 0 efter två överföringar?

Lycka till! Good luck!