

**EXAM:** Matematisk statistik och diskret matematik D (MVE055/MSG810)

**Tid och plats:** Onsdag den 11 januari 2012, kl. 14.00–18.00, V.

**Jour:** Krzysztof Bartoszek, tel. 0700-771 093.

**Hjälpmedel:** Chalmersgodkänd miniräknare och som mest en (tvåsidig) A4 ark med egna anteckningar. Tabeller med lämpliga statistiska fördelningar är givna.

**Betyg:** 3: 12 poäng, 4: 18 poäng, 5: 24 poäng. Max antal poäng: 30.

**Motivation:** Alla svar/lösningar ska vara motiverade.

**Språk:** Det finns en svensk och en engelsk version av frågorna. Du kan skriva dina svar på bägge av dessa språk.

**VIKTIGT:** Det finns två versioner av tentan. En för nuvarande studenter och en för studenter från föregående åren som väljer att göra en “old style” tenta. Detta är “old style” tentan.

1. (5p) Låt  $A$  och  $B$  vara två händelser.

a) (2p) Bevisa olikheten  $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$ .

Antag att  $P(A \cap B) = 0.2$  och  $P(A) = 0.4$  samt att  $A$  och  $B$  är oberoende.

b) Beräkna  $P(B)$ .

c) (2p) Kan du säga vad är  $P(A|B)$  utan att göra några beräkningar och varför (varför inte)? Ge denna sannolikhet.

2. (5p) Definiera

$$f(x) = \begin{cases} Cx(3-x) & \text{om } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) Beräkna för vilket värde av  $C$  är  $f(x)$  en frekvensfunktion (pdf).

b) Beräkna  $P(X \leq 0.5)$ .

c) Beräkna  $P(X \geq 2.5)$ .

d) Beräkna  $P(X \in (0.5, 2.5))$ .

e) Om  $0 \leq \alpha \leq 1$  och  $g(x)$ ,  $h(x)$  är kontinuerliga frekvensfunktioner, visa att  $d(x) = \alpha g(x) + (1 - \alpha)h(x)$  är också en kontinuerlig frekvensfunktion.

3. (3p) Låt  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  vara en vektor av fixa tal (vikter). För ett stickprov  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  definiera den **viktade summan** som

$$\bar{X}_{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^n w_i X_i.$$

Svara på följande (kom ihåg att ett stickprov betyder att punkterna är oberoende och likafördelade):

a) Hitta villkor för  $\mathbf{w}$  som gör  $\bar{X}_{\mathbf{w}}$  till en väntevärdesriktig skattare av väntevärdet för fördelningen från vilken  $X_i$  är tagna. Om dessa villkor gäller så kallas  $\bar{X}_{\mathbf{w}}$  ett **viktad medelvärde**.

b) (2p) Bestäm vad är variansen av ett viktad medelvärde (i termer av vikter  $\mathbf{w}$ ) om varje  $X_i$  har variansen  $\sigma^2$ .

4. (3p) Tänk dig ett enkelt hasardspel där du satsar  $n$ kr, kastar ett mynt (med sannolikheten för klave  $p$ ) och vinner  $n$ kr om du får klave samt förlorar  $n$ kr om du får krona. Tänk dig nu följande strategi för att spela spelet:

- Börja med att satsa 1kr.
- Varje gång du förlorar, satsa dubbelt så mycket på nästa kast.
- Så fort du vinner, avsluta.

- a) Låt  $K$  vara antalet gånger som du satsar i detta spel. Vad är fördelningen för  $K$ ? Härled också den motsvarande frekvensfunktionen.
- b) Låt  $X$  vara beloppet som du satsar i den sista turen (den du vinner). Vilka möjliga värden kan  $X$  anta och varför? Härled formeln för frekvensfunktionen för  $X$ , dvs  $P(X = x)$ .
- c) Beräkna, genom att använda definitionen för väntevärde, väntevärden av  $K$  och  $X$  (beroende på värdet av  $p$ ). Kan du se vad som är konstigt med dem? Vilket problem med denna spelstrategi avslöjar de?
5. (5p) Du använder en våg för att väga en okäng mängd av guld. Det är känt att denna våg ger mätningar som har ett fel som följer en normalfördelning med väntevärde 0 och standardavvikelse 0.03 uns. Du tar ett stickprov av 3 mätningar och beräknar deras medelvärde.
- a) Ge definitionen för en konfidensintervall med konfidensgraden  $1 - \alpha$ .
- b) Förklara skillnaden mellan följande två påståenden som handlar om den okända väntevärdesparametern  $\mu$ :
- $\mu \in (0.95, 1.05)$  med 95% säkerhet (konfidens)
  - $\mu \in (0.95, 1.05)$  med 95% sannolikhet
- c) Vad är sannolikheten att medelvärdet av dessa tre mätningar är inom 0.03 uns från den sanna vikten?
- d) Hur mycket kommer denna sannolikhet att ändras om du ökar antalet vägningar till 4?
- e) Om en uns av guld kostar ungefär 11 500kr skulle du vara orolig om du använde denna våg till att väga (BARA EN GÅNG) en uns av guld för en transaktion och varför? Och om du ville byta en uns av silver (ungefär 210 kr per uns)?
6. (2p)
- En tidning utför en opinionundersökning angående en folkomröstning. Motionen som är anledningen till folkomröstningen vill accepteras om majoriteten av de röstande säger "ja". Under opinionundersökningen tillfrågade man 850 personer, och av dessa svarade 400 att de kommer att rösta "ja". Tillåter detta resultat att förutsäga utfallet av omröstningen med konfidensgraden 95%? Du får använda normalapproximationen för binomialfördelningen för att svara på detta, *i.e.*  $\text{Binom}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, np(1 - p))$ .
7. (3p)
- a) Ge definitionen för den momentgenererande funktionen av en stokastisk variabel  $X$  och diskutera relationen mellan denna och en genererande funktion.
- b) Beräkna den momentgenererande funktionen av en geometrisk fördelad stokastisk variabel med parameter  $p$ .
- c) Använd momentgenererande funktionen till att beräkna väntevärde och varians av en geometrisk fördelad stokastisk variabel.
8. (4p) För en tid sedan Harvard, Dartmouth och Yale accepterade bara manliga studenter. Antag att på den tiden 80% av söner av de som gick på Harvard gick också på Harvard och de resterande gick på Yale; 40% av söner av de som gick på Yale gick också på Yale och de resterande fördelades jämnt mellan Harvard och Dartmouth; och av de som gick på Dartmouth, 70% gick också på Dartmouth, 20% gick på Harvard och 10% gick på Yale. Detta ger en Markovkedja som modellerar vart ättlingar av alumner av dessa universitet tog deras examina.
- a) Skriv ner övergångsmatrisen för denna Markovkedja.

- b) Hitta sannolikheten att en sonson av en man från Yale gick på Harvard.
- c) Antag att sonen av en man från Harvard alltid gick på Harvard. Skriv ner övergångsmatrisen för denna modifierade Markovkedja. Vad kallas ett tillstånd som Harvard i denna kedja?
- d) Hitta sannolikheten att en sonson av en man från Yale gick på Yale i den ändrade situationen ovan. Förklara ändringen.

Lycka till! Good luck!