MVE055/MSG810 2017 Föreläsning 5

Petter Mostad

Chalmers

September 11, 2017

Några flera familjer av fördelningar

- Vi har än så länge hört om den Geometriska fördelningen, Binomialfördelningen, och Normalfördelningen.
- Detta är exempler på *familjer av fördelningar*: För varje värde av *parametrarna* i familjen så får man en specifik fördelning.
- Nu skall vi titta på ett antal andra familjer: Poissonfördelningen, den hypergeometriska fördelningen, negativ Binomialfördelning, Gammafördelningen, Chi-kvadrat fördelningen, och exponentialfördelningen. Varje familj har egenskaper som gör den till en lämplig *modell* för vissa fenomen i värkligheten med motsvarande egenskaper.
- Slutligen nämnar vi ett exempel på en stokastisk process: Poissonprocessen.

Poissonfördelningen

- En diskret variabel X med möjliga värden $0, 1, 2, \ldots$ har en Poissonfördelning med *intensitet* λ om frekvensfunktionen är

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

- Används ofta för att modellera antalet oberoende händelser inom någon tidsram eller dylikt.
- En Biomialfördelning med parametrar n och p närmar sig en Poissonfördelning med parameter λ om $n \to \infty$ medan $np = \lambda$.
- Väntevärdet är λ och variansen är λ.
- Om $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ och $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ så blir

$$X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

- Exempel: Om antalet inkommande telefonsamtal är Poissonfördelad med väntevärde 3 per minut, så är antalet samtal per timme Poissonfördelad med väntevärde $3 \cdot 60 = 180$.

Den negativa Binomialfördelningen

- En diskret stokastisk variabel X har en negativ Binomialfördelning med parametrar p och r om den har frekvensfunktion

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}p^r$$

  Märk att de möjliga värdena till x är $r, r+1, r+2, \ldots$.
- Motsvarar en sekvens av oberoende försök där varje försök har sannolikhet p för att lyckas, där antalet lyckade försök är fixerad till r, och där x är antalet försök man behöver göra för att uppnå r lyckade försök.
- Om $X \sim \text{Neg-Binomial}(p, r)$ så har vi
  - $\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p}$.
  - $\text{Var}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

Hypergeometrisk fördelning

- En diskret stokastisk variabel X har en Hypergeometrisk fördelning med parametrar N, n och r om frekvensfunktionen är

$$f(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

  Märk att de möjliga värdena är alla heltalsvärder från och med $\max(0, n-(N-r))$ till och med $\min(n, r)$.
- Motsvarar följande situation: Du har en urna med N bollar totalt, där r är svarta och $N-r$ är vita. Om du drar n bollar från urnan, vad är sannolikheten att du får exakt x svarta?
- Om $X \sim \text{Hypergeometrisk}(N, n, r)$ så har vi
  - $\mathbb{E}[X] = n \cdot \frac{r}{N}$
  - $\text{Var}[X] = n \cdot \frac{r}{N} \cdot \frac{N-r}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Gammafunktionen

- För $\alpha > 0$ definieras $\Gamma(\alpha)$ med

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z}\, dz$$

- Viktiga egenskaper:
  - $\Gamma(1) = 1$
  - För $\alpha > 0$ kan man visa att $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
  - Därmed får vi, för positiva heltal, $n! = \Gamma(n+1)$.
- Man får t.ex. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Funktionen kan utvidgas till en analytisk funktion av en komplex variabel z.

Gammafördelningen

- Enligt Milton: En kontinuerlig stokastisk variabel X med de positiva reella talen som möjliga värden har en Gammafördelning med parametrar $\alpha > 0$ och $\beta > 0$, vi skriver $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, om täthetsfunktionen är

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta).$$

- MÄRK: Många ställen används i stället en definition där β ersätts med $1/\beta$, så att täthetsfunktionen blir

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x\beta)$$

  Kolla vilken definition som används om du tex. använder programmer för simulering av eller beräkning för Gammafördelade variabler!

- Om $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ så har vi
  - $\mathbb{E}[X] = \alpha\beta$
  - $\text{Var}[X] = \alpha\beta^2$

Chi-kvadrat fördelningen

- En variabel X har en Chi-kvadrat fördelning med γ frihetsgrader, vi skriver $X \sim \chi^2(\gamma)$, om X har en Gammafördelning med parametrar $\gamma/2$ och 2:
$$\chi^2(\gamma) = \text{Gamma}(\gamma/2, 2)$$
- Vi får därmed, om $X \sim \chi^2(\gamma)$,
  - $\mathbb{E}[X] = \gamma$.
  - $\text{Var}[X] = 2\gamma$.
- En viktig egenskap: Om $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ är oberoende variabler med standard normalfördelning, så är
$$Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_k^2 \sim \chi^2(k)$$
- Givet γ och vissa F med $0 < F < 1$ så finnns det i Milton Appendix A Table IV en tabell med värden t så att
$$\Pr[X \leq t] = F$$
om $X \sim \chi^2(\gamma)$.

Exponentialfördelningen

- En stokastisk variabel X med positiva reella tal som möjliga värden har en exponentialfördelning med parameter β, $X \sim \text{Exponential}(\beta)$, om täthetsfunktionen är

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$$

- MÄRK: Många använder i stället $\lambda = 1/\beta$ som parameter!
- Vi får direkt att om $X \sim \text{Exponential}(\beta)$, så blir
  - $\mathbb{E}[X] = \beta$
  - $\text{Var}[X] = \beta^2$.
  - $F_X(x) = 1 - e^{-x/\beta}$ för fördelningsfunktionen F_X.
- Vi kan också använda att exponentialfördelningen är ett specialfall av Gammafördelningen:

$$\text{Exponential}(\beta) = \text{Gamma}(1, \beta)$$

Exponentialfördelningen

- "Har inget minne": Om $X \sim \text{Exponential}(\beta)$, så är

$$\Pr[X > s + t] = \Pr[X > s] \Pr[X > t]$$

  och med andra ord

$$\Pr[X > s + t \mid X > s] = \Pr[X > t]$$

- Exponentialfördelningen är därmed nyttig för att modellera tiden mellan händelser om är oberoende av varann.
- Antag att man har händelser i anknytning till tidpunkter $T_1, T_2, T_3, \ldots$ och att händelsernas tidpunkter är oberoende av varann och har konstant intensitet. Antag medelvärdet för antalet händelser inom en tidsenhet är λ. Då är medelvärdet för tidslängden mellan händelserna (mätt i denna tidsenheten) $1/\lambda$, och
  - Antalet händelser inom tidsenheten är Poissonfördelad med parameter λ.
  - Tidsintervallet mellan händelser är Exponentialfördelad med parameter $1/\lambda$.