MVE090 Matematisk statistik Z2

Skriftlig tentamen tisdag den 5 april 2016 kl 14.00 – 18.00

Lärare och jour: Patrik Albin, telefon 070 6945709.

Hjälpmedel: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget annat anges.

1. Bestäm sannolikheten att vid kast av fem stycken vanliga tärningar (Yatzy) resultatet blir antingen liten straight eller stor straight, dvs. tärningar visar antingen $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ eller $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ (utan hänsyn till ordningen mellan dem). **(5 poäng)**

2. Hur många gånger N skall man kasta ett välbalanserat mynt för att maximera sannolikheten att man får exakt två stycken klave under de N kasten? **(5 poäng)**

3. Hur kan man beräkna $P[X > Y]$ om X och Y är oberoende stokastiska variabler med X standard normalfördelad och Y exponentialfördelad med parameter 1. **(5 poäng)**

4. Utanför en fotbollsarena önskar en teknolog finna ett konfidensintervall inom vilket variansen av längden av fotbollssupportar ligger med 95% säkerhet genom registrera längden x_i för ett antal testsupportrar $i = 1, \ldots, n$. Hur kan detta göras? **(5 poäng)**

5. Utanför en fotbollsarena önskar en teknolog undersöka en linjär modell $y = a + b\,x$ som beskriver sambandet mellan längd x och vikt y för fotbollssupportar genom registrera längd x_i och vikt y_i för ett antal testsupportrar $i = 1, \ldots, n$. Mera precist önskar teknologen avgöra om lutningskoefficient b kan anses vara statistiskt signifikant skild från noll. Beskriv hur en sådan undersökning kan gå till. **(5 poäng)**

6. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en kontinuerlig stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda(x-\mu)}$ för $x \leq \mu$ och $f(x) = 0$ för $x > \mu$. Bestäm skattningen enligt maximum likelihood metoden av parametrarna $\lambda > 0$ och $\mu \in \mathbb{R}$. **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z2

Lösningar till tentamen den 5 april 2016

1. Det finns fem platser att välja för 2:an, fyra platser för 3:an, tre platser för 4:an, två platser för 5:an och en plats för 1:an eller 6:an, där sannolikheten för varje sådant vald ordning är $(1/6)^4 \cdot (1/3)$, så den sökta sannolikheten är $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1/6)^4 \cdot (1/3) = 5/162$.

2. Sannolikheten för två klavar på N kast är $\binom{N}{2} \cdot (\frac{1}{2})^N = N\,(N-1)\,(1/2)^{N+1}$ där inkrementet $N\,(N-1)\,(1/2)^{N+1} - (N-1)\,(N-2)\,(1/2)^N = N\,(N-1)\,(1/2)^{N+1} - 2\,(N-1)\,(N-2)$ $(1/2)^{N+1} = (4-N)\,(N-1)\,(1/2)^{N+1}$ är positivt för $N < 4$, noll för $N = 4$ och negativt för $N > 4$, så att maximala sannolikheten $3/8$ upppnås för både $N = 3$ och $N = 4$.

3. $P[X > Y] = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x>y\}} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_{x=0}^{x=\infty}\int_{y=0}^{y=x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{e}^{-y}\,dy = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\mathrm{e}^{-x^2/2}\,(1-\mathrm{e}^{-x})\,dx = \frac{1}{2} - \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-(x+1)^2/2}\mathrm{e}^{1/2}\,dx = \frac{1}{2} - \sqrt{e}\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}\,dy = \frac{1}{2} -$ $\sqrt{e}\,P[\mathrm{N}(0,1) > 1] = \frac{1}{2} - 0.1587\sqrt{e}\,.$

4. Detta kan man göra enligt sats 8.1.2 i boken av Milton och Arnold.

5. Enligt avsnitt 11.2 i boken av Milton och Arnold är skattningen $\hat{b}$ av b normalfördelad med väntevärde b och varians $\sigma^2/\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$ där σ^2 skattas med $\hat{\sigma}^2 = \mathrm{SSE}/(n-2)$ och $\mathrm{SSE} = \sum_{i=1}^n (y_i - (\hat{a} + \hat{b}\,x_i))^2$. Alltså kan vi testa $H_0 : b = 0$ mot alternativet $H_1 : b \neq 0$ på nivå α genom undersöka om $|\hat{b}|$ dividerad med $\sqrt{\hat{\sigma}^2/\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}$ är större än T_{n-2} för kummulativa sannolikheten $1 - \alpha/2$ enligt tabell VI i boken av Milton och Arnold.

6. Man ser lätt att för varje givet λ-värde likelihood funktionen $\prod_{i=1}^n f(x_i)$ maximeras för $\mu = \max(x_1, \ldots, x_n)$. För varje givet μ-värde visar vidare en enkel derivering att likelihood funktionen maximeras för $\lambda = 1/(\mu - \bar{x}) = 1/[\max(x_1, \ldots, x_n) - \bar{x}]$.