MVE090 Matematisk statistik Z

Skriftlig tentamen fredag den 26 augusti 2016 kl 8.30 - 12.30

Lärare och jour: Patrik Albin, telefon 070 6945709.

Hjälpmedel: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget annat anges. Lycka till!

1. En teknolog spelar spelet Yatzy med avsikt samla så många 6:or som möjligt i en spelomgång bestående av tre delomgångar: först kastas fem tärningar varefter eventuellt erhållna 6:or lägges åt sidan och resterande tärningar kastas igen, varefter eventuellt nyerhållna 6:or lägges åt sidan och resterande tärningar kastas en sista gång och totala antalet erhållna 6:or i de tre delomgångarna registreras. Vad är sannolikheten att teknologen samlat ihop högst en 6:a efter en dylik Yatzy spelomgång? **(5 poäng)**

2. Beräkna sannolikheten $P(X>Y>Z)$ för tre oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler X, Y och Z med parameter 1. **(5 poäng)**

3. Visa att $E[\mathrm{e}^{t(X+Y)/\sqrt{2}}] = \mathrm{e}^{t^2/2}$ då X och Y är oberoende standard normalfördelade stokastiska variabler. **(5 poäng)**

4. Utanför en fotbollsarena önskar en teknolog statistiskt testa huruvida variansen av längden av fotbollssupportar kan anses vara större än 0.01 m2 genom registrera längden x_i för ett antal testsupportrar $i=1,\ldots,n$. Hur kan denna test utföras? **(5 poäng)**

5. Utanför en fotbollsarena önskar en teknolog undersöka en linjär modell $y=a+b\,x$ som beskriver sambandet mellan längd x och vikt y för fotbollssupportar genom registrera längd x_i och vikt y_i för ett antal testsupportrar $i=1,\ldots,n$. Mera precist önskar teknologen avgöra om parametern a kan anses vara statistiskt signifikant skild från noll. Beskriv hur en sådan undersökning kan gå till. **(5 poäng)**

6. Låt x vara ett observerat värde av en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion $f(x)=3x^2/(2b^3)$ för $x\in[-b,b]$ och $f(x)=0$ för övrigt. Bestäm maximum likelihood skattningen av parametern $b>0$ baserad på observationen x. **(5 poäng)**

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 26 augusti 2016

1. Sannolikheten är P[ingen 6:a i de tre delomgångarna]+P[ingen 6:a i de två första omgångarna och en i den sista]+P[ingen 6:a i den första omgången, en i den andra och ingen i den sista] +P[en 6:a i den första delomgången och ingen i de två följande]$=(5/6)^{15}+(5/6)^{10}\cdot 5\cdot(1/6)\cdot(5/6)^4+(5/6)^5\cdot 5\cdot(1/6)\cdot(5/6)^4\cdot(5/6)^4+5\cdot(1/6)\cdot(5/6)^4\cdot(5/6)^8$.

2. De sex möjliga ordningarna $X>Y>Z$, $X>Z>Y$, $Y>X>Z$, $Y>Z>X$, $Z>X>Y$ och $Z>Y>X$ är alla lika sannolika med sannolikhet 1/6 vardera.

3. $E[\mathrm{e}^{t(X+Y)/\sqrt{2}}]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{t(x+y)/\sqrt{2}}f_{XY}(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{t(x+y)/\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}\,dxdy=[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{tx/\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx]^2=\mathrm{e}^{t^2/2}[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(x-t/\sqrt{2})^2/2}\,dx]^2=\mathrm{e}^{t^2/2}$.

4. Detta kan man göra enligt avsnitt 8.6 i boken av Milton och Arnold.

5. Enligt avsnitt 11.2 i boken av Milton och Arnold är skattningen $\hat{a}$ av a normalfördelad med väntevärde a och varians $\frac{1}{n}\sigma^2\sum_{i=1}^n x_i^2/\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2$ där σ^2 skattas med $\hat{\sigma}^2=\mathrm{SSE}/(n-2)$ och $\mathrm{SSE}=\sum_{i=1}^n(y_i-(\hat{a}+\hat{b}\,x_i))^2$. Alltså kan vi testa $H_0:a=0$ mot alternativet $H_1:a\neq 0$ på nivå α genom undersöka om $|\hat{a}|$ dividerad med $\sqrt{\frac{1}{n}\hat{\sigma}^2\sum_{i=1}^n x_i^2/\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2}$ är större än T_{n-2} för kummulativa sannolikheten $1-\alpha/2$ enligt tabell VI i boken av Milton och Arnold.

6. För undvika att likelihood funktionen $f(x)$ blir noll måste vi välja $x\in[-b,b]$, dvs. $b\geq|x|$. För dylika b-värden maximeras $f(x)=3x^2/(2b^3)$ av det minsta möjliga b-värdet, dvs. av $b=|x|$ som därmed är maximum likelihood skattningen.