MVE090 Matematisk statistik Z

Skriftlig tentamen fredag 7 oktober 2016 kl 14.00 – 18.00

Lärare och jour: Patrik Albin, telefon 070 6945709.

Hjälpmedel: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

1. Vad är sannolikheten att få en "straight" (dvs. stege) i en pokergiv om fem kort från en vanlig kortek (utan joker) med 52 kort som varken är en "royal straight" (dvs. tio, knekt, dam, kung och ess) eller "straight flush" (dvs. en stege med alla korten av samma slag spader, klöver, ruter eller hjärter)? Notera att ess får räknas lågt (dvs. ess, två, tre, fyra och fem är en stege). **(5 poäng)**

2. Låt X vara en stokastisk variabel som är standard normalfördelad med fördelningsfunktion $F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\, dy$. Vilken täthetsfunktion $f_Y(y)$ har den stokastiska variabeln $Y = -\ln(F_X(X))$? **(5 poäng)**

3. En tvådimensionell stokastisk variabel (X, Y) har täthetsfunktion

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1/x & \text{för } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Beräkna $E[X \mid Y = y]$. **(5 poäng)**

4. Utanför en fotbollsarena önskar en teknolog undersöka om det finns någon skillnad i andelen glasögonbärare mellan kvinnliga och manliga fotbollssupportar genom att registrera hur många män och kvinnor som bär eller inte bär glasögon för ett antal testsupportrar. Mera precist önskar teknologen räkna ut ett intervall inom vilket med viss säkerhet den verkliga (men för teknologen innan undersökningen obekanta) skillnaden mellan nämnda andelar ligger. (Dvs. ett konfidensintervall för skillnaden mellan andelen glasögonbärare bland kvinnor och andelen glasögonbärare bland män.) Beskriv hur en statistiskt korrekt sådan undersökning kan gå till. **(5 poäng)**

5. Utanför en fotbollsarena önskar en teknolog undersöka om det finns någon korrelation mellan längd x och vikt y för fotbollssupportar genom registrera längd x_i och vikt y_i för ett antal testsupportrar $i = 1, \ldots, n$. Mera precist önskar teknologen avgöra om korrelationskoefficienten mellan längd och vikt är statistiskt signifikant skild från noll. Beskriv hur en statistiskt korrekt sådan undersökning kan gå till. **(5 poäng)**

6. Man har en enda observation x av en stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f_X(x) = (1-p)\,\mathrm{e}^{-2|x|} + p\,\mathrm{e}^{-|x|}/2$ för $x \in \mathbb{R}$ där $p \in [0,1]$ är en parameter. Bestäm maximum-likelihood skattningen av p. **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen fredag 7 oktober 2016

1. $\frac{20}{52} \cdot \frac{16}{51} \cdot \frac{12}{50} \cdot \frac{8}{49} \cdot \frac{4}{48} \cdot 9 - \frac{20}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{49} \cdot \frac{1}{48} \cdot 9.$

2. $F_Y(y) = P[-\ln(F_X(X)) \leq y] = P[\ln(F_X(X)) \geq -y] = P[F_X(X) \geq \mathrm{e}^{-y}] = P[X \geq F_X^{-1}(\mathrm{e}^{-y})] = 1 - F_X(F_X^{-1}(\mathrm{e}^{-y})) = 1 - \mathrm{e}^{-y}$ för $y > 0$ [notera att de möjliga värdena för Y är $(0, \infty)$], så att $f_Y(y) = \mathrm{e}^{-y}$ för $y > 0$, dvs. Y är exponentialfördelad.

3. $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx = \int_y^1 1/x\, dx = -\ln(y)$ för $0 \leq y \leq 1$ så att $E[X \mid Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|y}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{XY}(x,y)/f_Y(y)\, dx = \int_y^1 (-\ln(y))^{-1}\, dx = (1-y)/(-\ln(y))$ för $0 \leq y \leq 1$. (Detta är en variant av exempel 5.4.2 i läroboken.)

4. Detta står beskrivet på sidan 321 i läroboken (och räknas tal på under kursen).

5. Detta står beskrivet på sidan 422 i läroboken (och räknas tal på under kursen).

6. Eftersom $\mathrm{e}^{-2|x|}$ är större än $\mathrm{e}^{-|x|}/2$ om och endast om $|x| < \ln(2)$ så är maximum-likelihood skattningen $p = 0$ om $|x| \leq \ln(2)$ och $p = 1$ om $|x| \geq \ln(2)$. (Det tvetydiga fallet $|x| = \ln(2)$ inträffar med sannolikhet 0 och kan därför lämnas utan avseende.)