INGA LÖSNINGAR ERHÅLLNA!

MVE090 Matematisk statistik Z, 7.5 hp

Tentamen 21 augusti 2013 em

Tillåtna hjälpmedel: Valfri räknedosa utan lagrad information om kursen, Beta samt kursens formel- och tabellsamling.

Examinator: Tommy Norberg.

Telefonjour: Tommy Norberg, ankn 3528 eller 0730 79 42 09.

Maximalt antal tentamenspoäng är 30, av dessa krävs normalt 12 för godkänt betyg och 18 resp 24 för 4:a och 5:a. Obs att ev bonus från duggan endast gäller godkäntnivån.

Svar och lösningar till följande 8 uppgifter skall motiveras om ej annat sägs. Tänk på att sannolikheter bör ges med minst tre korrekta värdesiffror. Avrunda med förstånd för övrigt.

Uppgifter

1. Visa att

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

gäller för händelser A, B. (3 p)

2. Firman Solo AB (påhittat namn) tillverkar ett avancerat mätsystem som används av Trafikverket. Solo AB garanterar att deras senaste version ska fungera i minst 5000 km. Ur tillförlitlighetssynpunkt är mätsystemet uppdelad i tre seriekopplade delsystem kallade H, D och S. Delsystem H har en Weibullfördelad livslängd med $\alpha = 4.0 \cdot 10^{-10}$, $\beta = 2$ ("tidsenheten" är km). Delsystem D har testats empiriskt under många års drift och man vet att risken att delsystem D upphör att fungera innan 5000 km drift är ungefär 1 på 100. Delsystem S består egentligen av tre parallellkopplade likadana delsystem S1,S2,S3. Om dessa vet man att deras resp livslängder är gammafördelade med parametrar $\alpha = 5$, $\beta = 488.2$. Av 100 sålda mätsystem, hur många kan man förvänta sig fungerar i minst 5000 km? Det är rimligt att anta att samtliga delsystem fungerar oberoende av varandra. Hjälp: Att en stokastisk variabel X är gamma(α, β)-fördelad innebär att $2X/\beta$ är $\chi^2(2\alpha)$-fördelad och tvärtom. (4 p)

3. Låt Z_1, Z_2 vara oberoende N$(0, 1)$-variabler och definiera

$$X = 5 + 3Z_1 + 8Z_2$$
$$Y = 8 + 2Z_1 + 4Z_2$$

Beräkna (a) kovariansen och (b) korrelationen mellan X och Y. (4 p)

4. Livslängden hos en ny typ av lampa tros följa en exponentialfördelning. Ett långtidstest av 15 lampor gav följande brinntider:

2049	989	20637	906	4583
23275	12783	6035	434	357
18476	298	438	7228	2228

(enhet: timmar). Medelvärde och standardavvikelse är $\bar{x} = 6\,714.4$, $s = 8\,094.2$. Beräkna (a) momentskattningen och (b) trolighetsskattningen av förväntad livslängd μ. (4 p)

5. (Forts.) Beräkna ett nedåt begränsat 95% konfidensintervall för förväntad livslängd μ av lamporna i uppgift 4. Obs att eftersom observationerna är få är det ej möjligt att normalapproximera. Du behöver därför använda att för ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på en variabel X som är exponentialfördelad med väntevärde μ, gäller att $2\sum_{i=1}^{n} X_i/\mu \sim \chi^2(2n)$. (4 p)

6. Under åren 2009–2010 registrerades $n = 12$ utsläpp av en viss tungmetall i en industrianläggning i en grannstad. Medelvärde och standardavvikelse av de respektive utsläppsmängderna var $\bar{x} = 22.3$ mg och $s = 4.97$. I diskussionen med den lokala miljöförvaltningen var det viktigt att avgöra om industrins företrädare med hyfsat hög säkerhet (konfidens) kunde hävda att medelutsläpp är mindre än 26 mg. Kunde de det? (4 p)

7. (Forts.) Beräkna ett uppåt begränsat konfidensintervall för standardavvikelsen för utsläppsmängden av tungmettalen i uppgift 6. Konfidensgraden ska vara 95%. (3 p)

8. (Forts.) Under år 2011 gjordes förbättringar, vars syfte var att minska både antalet utsläpp och mängderna som släpps ut. Under år 2012 registrerades bara 3 utsläpp. Medelvärde och standardavvikelse av utsläppsmängderna var $\bar{x} = 18.5$ mg och $s = 2.36$. Verkar det som att utsläppsmängderna har minskat? (4 p)