MVE090 Matematisk statistik Z2

Skriftlig tentamen tisdag den 27 maj 2014 kl 14.00–18.00

Lärare och jour: Patrik Albin, telefon 070 6945709.

Hjälpmedel: Beta, valfri räknare utan lagrad information om kursen och häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor*.

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

Rättning: Patrik skickar ett PingPong-email när tentamen är rättad.

1. Förklara hur man bestämmer sannolikheten att vid kast med n_1 stycken tärningar resultatet blir exakt n_2 stycken tärningar med sex prickar uppåt. **(5 poäng)**

2. Bestäm x_α så att $P[X > x_\alpha] = \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ för en kontinuerlig stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f(x) = 2x$ för $0 \leq x \leq 1$ och $f(x) = 0$ för övrigt. **(5 poäng)**

3. Bestäm $E[X|Y = y]$ för en tvådimensionell kontinuerlig stokastisk variabel (X, Y) med täthetsfunktion $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$ för $x, y \in \mathbb{R}$. **(5 poäng)**

4. Hur kan man med hjälp av ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på en stokastisk variabel X skapa sig en approximativ grafisk bild av X's täthetsfunktion $f(x)$? **(5 poäng)**

5. Utanför en vallokal önskar man intervjua ett visst antal personer för att kunna ange ett procentintervall inom vilket röstandelen för ett visst parti ligger med viss sannolikhet. Beskriv hur en statistiskt korrekt sådan undersökning kan gå till. **(5 poäng)**

6. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f(x) = 1/(b-a)$ för $a \leq x \leq b$ och $f(x) = 0$ för övrigt, där $a < b$ är två parametrar med okänt värde. Finn maximum likelihood skattningen av a och b. **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z2

Lösningar till tentamen tisdag den 27 maj 2014

1. n_2 är Binomial$(n_1, 1/6)$-fördelad så den sökta sannolikheten är $\binom{n_1}{n_2}(1/6)^{n_2}(5/6)^{n_1-n_2}$.

2. $P[X > x_\alpha] = \int_{x_\alpha}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{x_\alpha}^{1} 2x\,dx = 1 - x_\alpha^2 = \alpha$ som ger $x_\alpha = \sqrt{1-\alpha}$.

3. $f_{X|y} = f_{X,Y}(x,y)/f_Y(y)$ där $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}$ vilket ger $f_{X|y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ så att $E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_{X|y}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = 0$.

4. Gör ett histogram för $X_1, \ldots, X_n$.

5. Använd den inramade formeln på sid 315 i kursboken till att göra ett konfidensintervall för den sökta röstandelen – se även paragraf 47 i formelsamlingen.

6. Likelihoodfunktionen $\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$ är lika med $(b-a)^{-n}$ om $a \le \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ och $\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le b$ men 0 för övrigt. Denna maximeras för $b = \hat{b}$ så litet som möjligt och $a = \hat{a}$ så stort som möjligt bibehållande $a \le \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ och $\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le b$, vilket ger $\hat{a} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ och $\hat{b} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.