MVE090 Matematisk statistik Z2 (och Z3)

Skriftlig tentamen fredag den 29 augusti 2014 kl 8.30–12.30

Lärare och jour: Patrik Albin, telefon 070 6945709.

Hjälpmedel: Beta, valfri räknare utan lagrad information om kursen och häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor*.

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

1. Förklara hur man bestämmer sannolikheten att vid kast med n_1 stycken tärningar resultatet blir exakt n_2 stycken tärningar med högst två prickar uppåt och exakt n_3 stycken tärningar med minst fem prickar uppåt (där förstås $n_2+n_3 \leq n_1$). **(5 poäng)**

2. Bestäm 25%-, 50%- och 75%-percentilerna (dvs. första kvartilen, medianen och tredje kvartilen) för en kontinuerlig stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f(x) = 2x$ för $0 \leq x \leq 1$ och $f(x) = 0$ för övrigt. **(5 poäng)**

3. Bestäm $E[X|Y = y]$ för en tvådimensionell kontinuerlig stokastisk variabel (X, Y) med täthetsfunktion $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}$ för $x, y \geq 0$ och $f_{X,Y}(x, y) = 0$ för övrigt. **(5 poäng)**

4. Hur kan man med hjälp av ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på en stokastisk variabel X skapa sig en approximativ grafisk bild av X's fördelningsfunktion $F(x)$? **(5 poäng)**

5. Utanför en vallokal önskar man intervjuar ett visst antal personer för att försöka avgöra huruvida ett visst parti som fick andelen p_0 av rösterna i förra valet får en större andel p röster än p_0 i det aktuella valet. Beskriv hur en statistiskt korrekt sådan undersökning kan gå till. **(5 poäng)**

6. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f(x) = 1/(b-a)$ för $a \leq x \leq b$ och $f(x) = 0$ för övrigt, där $a < b$ är två parametrar med okänt värde. Använd stickprovsmomenten $M_1 = \sum_{i=1}^n X_i/n$ och $M_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$ till att bestämma skattningen enligt momentmetoden av a och b. **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z2 (och Z3)

Lösningar till tentamen fredag den 29 augusti 2014

1. Sannolikheten för varje enskild ordnad sekvens med n_2 tärningar med 1-2 prickar, $n_1-n_2-n_3$ tärningar med 3-4 prickar och n_3 tärningar med 5-6 prickar är $(1/3)^{n_2}(1/3)^{n_1-n_2-n_3}(1/3)^{n_3} = (1/3)^{n_1}$. Då det finns $\binom{n_1}{n_2}\binom{n_1-n_2}{n_3}$ olika sådana ordnade sekvenser är den sökta sannolikheten $\binom{n_1}{n_2}\binom{n_1-n_2}{n_3}(1/3)^{n_1}$.

2. Vi söker lösningen x_α till ekvationen $\alpha = P[X \le x_\alpha] = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{x_\alpha} 2x\,dx = x_\alpha^2$ för $\alpha = 0.25$, 0.5 och 0.75, vilket ger $x_{0.25} = \sqrt{0.25}$, $x_{0.5} = \sqrt{0.5}$ och $x_{0.75} = \sqrt{0.75}$.

3. Eftersom $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(x+y)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\,dx = \frac{1}{2}(1+y)\,\mathrm{e}^{-y}$ är $f_{X|y} = f_{X,Y}(x,y)/f_Y(y) = (x+y)\,\mathrm{e}^{-x}/(1+y)$ så att $E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f_{X|y}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\,(x+y)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx/(1+y) = (2+y)/(1+y)$ (där de båda integralernas värde kan bestämmas utan egna räkningar mha. Tabell 4.1 i Milton och Arnold).

4. Se avsnittet "Cumulative Distribution Plots (Ogives)" på sidorna 199-202 i Milton och Arnold.

5. Detta är en test av nollhypotesen $H_0 : p = p_0$ mot den alternativa hypotesen $H_1 : p > p_0$ enligt avsnitt 9.2 i Milton och Arnold.

6. Enligt Tabell 4.1 i Milton och Arnold är $E[X] = (a+b)/2$ och $\operatorname{Var} X = E[X^2] - (E[X])^2 = (b-a)^2/12$. Vi får därmed skattningarna av a och b enligt momentmetoden genom lösa ekvationerna $M_1 = (a+b)/2$ och $M_2 = (b-a)^2/12 + (a+b)^2/4$, vilket ger $a = M_1 - \sqrt{3}\sqrt{M_2 - M_1^2}$ och $b = M_1 + \sqrt{3}\sqrt{M_2 - M_1^2}$.