MVE090 Matematisk statistik Z2 (och Z3)

Skriftlig tentamen tisdag den 14 april 2015 kl 14.00 – 18.00

Lärare och jour: Patrik Albin, telefon 070 6945709.

Hjälpmedel: Beta, valfri räknare utan lagrad information om kursen och häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor*.

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

1. Förklara hur man bestämmer sannolikheten att vid kast av sex stycken vanliga tärningar på en gång resultatet blir en etta, en tvåa, en trea, en fyra, en femma och en sexa. **(5 poäng)**

2. Givet ett tal $\alpha \in (0,1)$, bestäm x_α så att $P[x_\alpha < X < 1-x_\alpha] = \alpha$ för en kontinuerlig stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f(x) = 2x$ för $0 \leq x \leq 1$ och $f(x) = 0$ för övrigt. **(5 poäng)**

3. Bestäm $P[X > y|Y = y]$ för en tvådimensionell kontinuerlig stokastisk variabel (X,Y) med täthetsfunktion $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}$ för $x, y \geq 0$ och $f_{X,Y}(x,y) = 0$ för övrigt. **(5 poäng)**

4. Hur kan man med hjälp av ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på en stokastisk variabel X skapa sig en grafisk bild av så kallade "outliers" i stickprovet, dvs. värden inom stickprovet som är ovanligt stora eller små? **(5 poäng)**

5. Utanför en fotobollsarena (tex. Gamla Ullevi) önskar man avgöra om supportrar (som är klart identiefierbara genom att bära klubbhalsdukar eller dylikt) från de två lagen som möts (tex. IFK Göteborg och GAIS) är olika långa. Beskriv hur en statistiskt korrekt sådan undersökning kan gå till. **(5 poäng)**

6. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en normalfördelad stokastisk variabel X med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2. Härled maximum likelihood skattningarna av μ och σ^2. **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z2 (och Z3)

Lösningar till tentamen tisdag den 14 april 2015

1. Sannolikheten för varje enskild ordnad sekvens med sex tärningar med en etta, en tvåa, en trea, en fyra, en femma och en sexa är $(1/6)^6$. Då det finns $\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 6!$ olika sådana ordnade sekvenser är den sökta sannolikheten $(1/6)^6(6!)$.

2. Vi söker lösningen x_α till ekvationen $\alpha = P[x_\alpha < X < 1-x_\alpha] = \int_{x_\alpha}^{1-x_\alpha} f(x)\,dx = \int_{x_\alpha}^{1-x_\alpha} 2x\,dx = (1-x_\alpha)^2 - x_\alpha^2 = 1-2x_\alpha$, vilket ger $x_\alpha = (1-\alpha)/2$.

3. Eftersom $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x+y)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\,dx = \frac{1}{2}(1+y)\,\mathrm{e}^{-y}$ är $f_{X|y} = f_{X,Y}(x,y)/f_Y(y) = (x+y)\,\mathrm{e}^{-x}/(1+y)$, så att $P[X>y|Y=y] = \int_y^\infty f_{X|y}\,dx = \int_y^\infty (x+y)\,\mathrm{e}^{-x}\,dx/(1+y) = \ldots = (1+2y)\,\mathrm{e}^{-y}/(1+y)$ för $y \geq 0$.

4. Se avsnittet "Boxplots" på sidorna 207-211 i Milton och Arnold.

5. Detta är en test av nollhypotesen $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ mot den alternativa hypotesen $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ enligt avsnitten 10.3-10.4 i Milton och Arnold.

6. Se Exempel 7.2.4 i Milton och Arnold.