MVE090 Matematisk statistik Z2

Skriftlig tentamen fredag den 5 juni 2015 kl 14.00 – 18.00

Lärare och jour: Patrik Albin, telefon 070 6945709.

Hjälpmedel: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

1. Förklara hur man bestämmer sannolikheten att vid kast av fem stycken vanliga tärningar (Yatzy) resultatet blir minst två stycken sexor. **(5 poäng)**

2. Hur många gånger N måste man kasta ett välbalanserat mynt (dvs. sannolikhet för klave är 1/2) för att sannolikheten skall vara högst 1/100=0.01 att man inte får en enda klave under de N kasten? **(5 poäng)**

3. Låt $\lambda > 0$ vara ett givet tal. Bestäm $E[X|Y = \ell]$ för en tvådimensionell diskret stokastisk variabel (X, Y) med täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(k,\ell) = \frac{(k+\ell)\,\lambda^{k+\ell}}{2\,\lambda\,(k!)\,(\ell!)}\,\mathrm{e}^{-2\lambda} \quad \text{för } k,\ell = 0,1,2,\ldots \quad \text{och} \quad f_{X,Y}(k,\ell) = 0 \quad \text{för övrigt.}$$

(5 poäng)

4. Beskriv tre olika sätt för hur man enligt kurslitteraturen (Milton och Arnold) grafiskt kan åskådliggöra ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på en stokastisk variabel X. **(5 poäng)**

5. Utanför en fotobollsarena önskar man finna en linjär modell $y = \beta_0 + \beta_1 x$ som på bästa sätt beskriver sambandet mellan längd x och vikt y för en typisk fotbollssupporter genom att registrera längd och vikt för ett antal "provsupportrar" :) – ett supporterstickprov. Beskriv hur en statistiskt korrekt sådan undersökning kan gå till. **(5 poäng)**

6. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en stokastisk variabel X med täthetsfunktion $f(x) = \lambda^{-1}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)/\lambda}$ för $x \geq \mu$ och $f(x) = 0$ för $x < \mu$. Använd stickprovsmomenten $M_1 = \sum_{i=1}^n X_i/n$ och $M_2 = \sum_{i=1}^n X_i^2/n$ till att bestämma skattningen enligt momentmetoden av parametrarna $\lambda > 0$ och $\mu \in \mathbb{R}$. **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z2

Lösningar till tentamen fredag den 5 juni 2015

1. Sannolikheten för att resultatet av tärningskasten blir två, tre, fyra eller fem stycken sexor är $\binom{5}{2}(1/6)^2(5/6)^3 + \binom{5}{3}(1/6)^3(5/6)^2 + \binom{5}{4}(1/6)^4(5/6) + (1/6)^5$.

2. Sannolikheten att inte få en klave under sju kast är $(1/2)^6 = 1/64$ medan sannolikheten att inte få en klave under åtta kast är $(1/2)^7 = 1/128$, så svaret är $N = 7$.

3. Eftersom

$$f_Y(\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{X,Y}(k,\ell) = \ldots = \frac{(\lambda+\ell)\,\lambda^{\ell}}{2\,\lambda\,(\ell!)}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \quad \text{för } \ell = 0,1,2,\ldots\,,$$

följer att

$$E[X|Y=\ell\,] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, f_{X|\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{f_{X,Y}(k,\ell)}{f_Y(\ell)} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{(k+\ell)\,\lambda^k}{(\lambda+\ell)\,(k!)}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \ldots = \frac{\lambda+\lambda^2+\lambda\,\ell}{\lambda+\ell}.$$

4. Se kapitel 6 i Milton och Arnold.

5. Detta göres mha. linjär regression enligt avsnitt 11.1 i Milton och Arnold.

6. Man ser lätt att $E[X] = \lambda+\mu$ och $E[X^2] = (E[X])^2+\lambda^2$, varför skattningarna $\hat{\lambda}$ och $\hat{\mu}$ av λ och μ blir $\hat{\lambda} = \sqrt{M_2-M_1^2}$ och $\hat{\mu} = M_1-\hat{\lambda} = M_1-\sqrt{M_2-M_1^2}\,$.