MVE090 Matematisk statistik Z

Skriftlig tentamen lördag den 3 juni 2017 kl 14.00 – 18.00

Lärare och jour: Claes Andersson, telefon 073 4031540.

Hjälpmedel: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5.

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

1. Ett bolag förfogar över tio programmerare, åtta systemanlytiker, fyra datatekniker och tre statistiker. Ifrån dessa skall ett team bestående av tre programmerare, två systemanlytiker, två datatekniker och en statistiker väljas ut. Hur många olika sätt kan detta göras på? **(5 poäng)**

2. Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktion (=täthetsfunktion) f_X. Finn frekvensfuntionen för den stokastiska variablen $Y = X^2$ (uttryckt mha. f_X). **(5 poäng)**

3. Låt (X, Y) vara en tvådimensionell stokastisk variabel med frekvensfunktion $f_{X,Y}(x, y) = c/x$ för $1 \leq y \leq x \leq 2$ och $f_{X,Y}(x, y) = 0$ för övrigt där c är en konstant. Finn värdet på konstanten c samt bestäm sannolikheten $P[X \geq 3/4 \text{ och } Y \leq 7/8]$. **(5 poäng)**

4. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara oberoende stokastiska variabler med gemensamt väntevärde $E[X_i] = \mu$ och gemensam varians $Var[X_i] = \sigma^2$. Visa att $s^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/(n-1)$ är en väntevärdesriktig skattning av σ^2. **(5 poäng)**

5. Låt $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ vara oberoende normalfördelade stokastiska variabler med $E[X_i] = \mu_X$, $E[Y_i] = \mu_Y$, $Var[X_i] = \sigma_X^2$ och $Var[Y_i] = \sigma_Y^2$ för alla i. Hur testar man hypotesen $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ mot alternativet att $H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$? **(5 poäng)**

6. Låt $Y_1, \ldots, Y_n$ vara oberoende normalfördelade stokastiska variabler med $E[Y_i] = \alpha + \beta\, x_i$ för några konstanter $\alpha, \beta, x_1, \ldots, x_n$ och gemensam varians $Var[Y_i] = \sigma^2$. Hur testar man hypotesen $H_0 : \beta = 0$ mot alternativet att $H_1 : \beta \neq 0$? **(5 poäng)**

Lycka till!

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen lördag den 3 juni 2017

1. $\binom{10}{3} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}$.

2. $f_Y(y) = \frac{d}{dy} P[Y \leq y] = \frac{d}{dy} P[X^2 \leq y] = \frac{d}{dy} P[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\,] = \frac{d}{dy} P[X \leq \sqrt{y}\,] - \frac{d}{dy} P[X < -\sqrt{y}\,] = f_X(\sqrt{y}\,)/(2\sqrt{y}\,) + f_X(-\sqrt{y}\,)/(2\sqrt{y}\,)$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = \int_{x=1}^{x=2}\big(\int_{y=1}^{y=x} c/x\,dy\big)\,dx = \int_1^2 c\,(1-1/x)\,dx = c\,(1-\ln(2))$ så att $c = 1/(1-\ln(2))$ och $P[X \geq 3/4 \text{ och } Y \leq 7/8] = 0$ eftersom $P[Y \notin [1,2]] = 0$.

4. $E[(n-1)\,s^2] = \sum_{i=1}^n E[X_i^2] - 2\sum_{i=1}^n E[X_i\overline{X}] + \sum_{i=1}^n E[\overline{X}^2] = n\,(\sigma^2+\mu^2) - (2/n)\,n\,(\sigma^2 + \mu^2) - 2\,(n-1)\,\mu^2 + \sigma^2 + n\,\mu^2 = (n-1)\,\sigma^2$.

5. Se Exempel 10.2.2 i boken.

6. Se boken sid 395.