

Kapitel 3

Identifiera som diskret variabel eller inte.

2. M: antalet meteoriter som slår ner på jorden per dag.
4. Neutroner som avges vid fission är antingen "prompt" eller "delayed". De "prompt" skickas ut inom 10^{-14} s, de "delayed" under en period på timmar. Låt D beteckna tiden det tar en delayed neutron att skickas ut vid en fission.
6. Antalet elavbrott per månad i Tennessee Valley elnätverk.

2.

M: Meteoriter/dag

Kontinuerlig om man tänker medelantalet meteoriter per dag.

4.

D: Kontinuerlig ty det handlar om tid.

6.

Skulle säga samma som 2 kontinuerlig ty man kollar på ett medel per dag.

3.8

När man borrar i berg använder man en särskild sorts borrarspets. Antalet hål som kan borraras med en spets betecknar vi X. Tätheten för X alltså $f(x)$ ges av följande:

X	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0.02	0.03	0.05	0.2	0.4	0.2	0.07	?

a) Vad är $f(8)$?

b) Hitta tabell för F.

c) använd F för att hitta sannolikheten att en slumpvis vald borr kan användas till mellan 3 och 5 hål?

d) Hitta $P[X \leq 4]$ och $P[X < 4]$ är dessa sannolikheter lika?

e) Hitta $F(-3)$ och $F(10)$.

a) Vi vet att

$$\sum_{x=1}^8 f(x) = 1$$

Detta ger att

$$0.02 + 0.03 + 0.05 + 0.2 + 0.4 + 0.2 + 0.07 + ? = 1$$

$$0.1 + 0.8 + 0.07 + ? = 1$$

$$0.97 + ? = 1$$

$$\underline{\underline{? = 0.03}}$$

b)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\tilde{x}=1}^{\tilde{x}} f(\tilde{x})$$

Den kumulativa fördelningsfunktionen fås genom att summera alla tal under x .

X	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0.02	0.03	0.05	0.2	0.4	0.2	0.07	0.03
F(x)	0.02	0.05	0.1	0.3	0.7	0.9	0.97	1.00

c) Sannolikheten att hamna mellan 3 och 5 kan skrivas som.

$$F(5) - F(3) = 0.7 - 0.1 = \underline{\underline{0.6}}$$

d) Nej dessa är inte lika.

$$P[X \leq 4] = F(4) = 0.3 \quad (1, 2, 3, 4)$$

$$P[X < 4] = F(3) = 0.1 \quad (1, 2, 3)$$

e)

$$F(-3) = 0 \quad \text{ty} \quad X \text{ alltid} \geq 0$$

$$F(10) = 1 \quad \text{ty} \quad X \text{ alltid} \leq 8$$

3.10

Det är känt att sannolikheten att kunna logga in på en dator remote vid en given tid är 0.7. Låt X beteckna antalet försök som måste göras för att komma åt datorn.

a) hitta de 4 första termerna i täthetstabellen

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.7 && \text{funkar första} \\ f(2) &= 0.3 \cdot 0.7 = 0.21 && \text{- inte första men andra} \\ f(3) &= 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.063 && \text{osv.} \\ f(4) &= 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.0189 \end{aligned}$$

b) ge ett slutet uttryck för $f(x)$

$$f(x) = 0.3^{x-1} \cdot 0.7$$

$\uparrow$
 $x-1$
misslyckande

ett lyckat

c) Hitta $P[X = 6]$.

$$f(6) = 0.3^{6-1} \cdot 0.7 = 0.001701$$

d) Hitta en sluten form för $F(x)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \sum_{k=1}^x f(k) = \sum_{k=1}^x f(k) = \sum_{k=1}^x 0.3^{k-1} \cdot 0.7 = \\ &= 0.7 \sum_{k=0}^{x-1} 0.3^k = \{ \text{geometrisk Summa} \} = 0.7 \cdot \frac{1-0.3^x}{1-0.3} = 1-0.3^x \end{aligned}$$

e) Använd F för att hitta sannolikheten att som mest 4 försök måste användas för att logga in.

$$P(X \leq 4) = F(4) = 1 - 0.3^4 = \underline{0.9919}$$

f) Använd F för att hitta sannolikheten att minst 5 försök behövs.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0.9919 =$$

$$= 0.0081$$

0.0081

3.14

I ett experiment testade man att ympa en typ av apelsin träd på rötterna av ett annat. En serie med 5 försök gjordes. Låt tätheten för X =#inyypnigar som misslyckades ges av:

X	0	1	2	3	4	5
f(x)	0.7	0.2	0.05	0.03	0.01	?

a) hitta $E[X]$.

$$? = 1 - 0.7 - 0.2 - 0.05 - 0.03 - 0.01 = 0.01$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^5 x f(x) = 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.05 + 3 \cdot 0.03 + 4 \cdot 0.01 + 5 \cdot 0.01 = \underline{0.48}$$

Summera för alla möjlig x viktat med sannolikheten täthetsfunktionen.

b) Hitta medelvärdet för X .

$$\mu_x = 0.48$$

μ - medelvärde - väntat värde

c) Hitta $E[X^2]$.

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^5 x^2 f(x) = 0^2 \cdot 0.7 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.05 + 3^2 \cdot 0.03 + 4^2 \cdot 0.01 + 5^2 \cdot 0.01 = 1.08$$

$$E(H(x)) = \sum_x H(x) f(x)$$

d) hitta $\text{Var}(X)$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1.08 - 0.48^2 = \underline{\underline{0.8496}}$$

e) hitta sigmakvadrat.

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(x) = \underline{\underline{0.8496}}$$

f) hitta standardavvikelsen för X.

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{0.8496} = \underline{\underline{0.9217}}$$

g) vilken enhet har sigma_x

Samma som X!
"Antal"

3.24

När man borrar efter olja är sannolikheten $1/13$ att hitta olja. Antag att en grupp borrar efter olja i olika delar av landet. Så att ett borrhål inte har med något annat att göra. Låt X vara antalet försök som behövs innan man hittar olja.

a) verifiera att X är geometriskt fördelad och hitta parametern p .

1. Experimentet består i en serie försök där utfallet antingen är "lyckas" (S) eller "misslyckas" (F)

2. Försöken är identiska och oberoende och sannolikheten att lyckas, p , är samma för alla försök.

3.

X = # försök som behövs innan första lyckas.

I vårt fall är $p = \frac{1}{13}$

X = # borrhål innan man hittar olja.

"hittar olja" (S) "hittar inte olja" (F)

b) Vad är det exakta uttrycket för tätheten hos X ?

$$f(x) = (1-p)^{x-1} p, \quad p = \frac{1}{13}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

c) Vad är det exakta uttrycket för den moment genererande funktionen för X ?

$$X \sim \text{geom}(p) \Rightarrow m_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}, \quad q = 1-p$$

$$p = \frac{1}{13}$$

d) Vad är värderna på $E[X]$, $E[X^2]$, σ^2 , σ ?

Dessa kan fås från den moment genererande funktionen.

$$E(X) = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{pe^t(1-qe^t) - pe^t(-qe^t)}{(1-qe^t)^2} = \left. \frac{pe^t(1-qe^t) + pe^tqe^t}{(1-qe^t)^2} \right|_{t=0} =$$

$$= \frac{p(1-q) - p(-q)}{(1-q)^2} = \frac{p - pq + pq}{1^2 - 2q + q^2} = \frac{p}{1 - 2q + q^2} =$$

$$= \frac{1/13}{1 - 2 \cdot 12/13 + (12/13)^2} = \frac{1/13}{\frac{13^2}{13^2} - \frac{24}{13} + \frac{144}{13^2}} = \frac{1/13}{\frac{13^2 - 24 \cdot 13 + 144}{13^2}} = \frac{1/13}{\frac{169 - 312 + 144}{169}} = \frac{1/13}{\frac{1}{13}} = 13$$

Finns också
en sats för μ hos
geometrisk fördelning
 $\mu = \frac{1}{p}$ (Enklare)

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Sats för} \\ \text{geom. förd} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{q}{p^2} = \frac{12/13}{(1/13)^2} = \frac{12/13}{1/13^2} = 12 \cdot 13 = \underline{\underline{156}}$$

Låt oss hitta $E(X^2)$.

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X)^2 + \text{Var}(X) = E(X^2) = 13^2 + 156 = \underline{\underline{325}}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} \approx \underline{\underline{12.49...}}$$

e) Hitta $P[X \geq 2]$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - f(1) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

Dvs sannolikheten att misslyckas vid första försöket.

Ett system använder 128-bits per meddelande som sänds. Ibland fås störningar så att en bit ändras vilket orsakar ett överförnings fel detta händer $1/1000$ -

Låt $X = \#$ överförningsfel per 128-bits som sänds.

Är X geometrisk? Om inte vilken egenskap saknas?

1. Experimentet består av en serie försök. Ok!

2. Försöken är identiska och oberoende.

3. Inte OK

$X \neq \#$ försök som behövs innan första lyckas.

Antalet överföringar i det här fallet är inte beroende om det lyckas eller inte.

3.32

En diskret randomiserad variabel har momentet genererande funktionen

$$m_x(t) = \exp(2(\exp(t)-1))$$

a) Hitta $E[X]$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \left. \frac{d m_x(t)}{d t} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{d t} \left(e^{2(e^t-1)} \right) \right|_{t=0} = 2 \cdot (e^t) \cdot e^{2(e^t-1)} \Big|_{t=0} \\ &= 2 \cdot e^0 e^{2(e^0-1)} = 2 \cdot e^{2 \cdot 0} = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

b) Hitta $E[X^2]$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{d^2}{d t^2} m_x(t) = \frac{d}{d t} 2 \cdot e^t \cdot e^{2(e^t-1)} = \frac{d}{d t} 2 e^{2(e^t-1+t/2)} = \\ &= 4 e^{2(e^t+t/2-1)} \left(e^t + \frac{1}{2} \right) = 4 e^{2(e^0+0-1)} + 2 e^{2(e^0+0-1)} \\ &\quad \underline{\underline{t=0}} \\ &= 4 e^{2 \cdot 0} + 2 e^{2 \cdot 0} = 4 + 2 = \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

c) Hitta σ^2 och σ

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E(X^2) - E(X)^2 \\ \sigma^2 &= 6 - 2^2 = 6 - 4 = \underline{\underline{2}} \\ \sigma &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

I ett elektronmikroskop fås bilder av föremålet man studerar på ett katodisktstrål-rör. Förr har man använt en 4x5 tums kamera. Men man tror att en 35 mm kamera kan ge samma resultat.

a) man fotar 15 olika föremål med båda kamerorna och utvärderar bilderna genom att låta en bedömare välja den skarpaste av en bild från varje kamera. Låt X vara antalet bilder valda från den nya kameran. Vad skulle vänta värdet på X vara om det inte är någon skillnad på bilderna?

Väntet värdet - $E[X]$
Om det inte var någon skillnad skulle sannolikheten vara 0.5 att en bild väljs.

$$15 \cdot 0.5 = \underline{\underline{7.5}} \quad E[X] = 7.5$$

b) Skulle du bli förvånad om bedömaren valde 12 eller mer från den nya kameran? Vilka sannolikheter är inblandade?

Låt oss kolla sannolikheten för detta om bilderna är lika.
 $P(X \geq 12)$?

X här är binomial fördelad med parametrar $n=15$, $p=0.5$.

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12) = 1 - P(X \leq 11) =$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{11} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1 - \sum_{x=0}^{11} \binom{15}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = 1 - 0.9824 =$$

$$= \underline{\underline{0.0176}} \quad \text{d.v.s. Ja jag skulle bli lite förvånad. men ändå inte helt omöjligt.}$$

c) Om $X \geq 12$ finns det anledning att tro att bedömaren inte väljer slumpmässigt?

Ja eftersom sannolikheten för det är $< 2\%$ så ja det låter mycket möjligt.

Nu Blair det baseball. En kastmaskin kastar bollen i strike zone för en 180 cm lång spelare 90% av gångerna.

Vad är förväntat antal kast tills fyra bollar missat strike zone?

X = tot antal försök tills 4 lyckade
 X här är negativt binomial fördelad
 med parametrar.

$$r = 4, \quad p = 0.1$$

för neg. binomial gäller.

$$f_X(x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 p har $\uparrow$ misslyckas $\uparrow$ lyckas
 många $x-r$ ggr. r ggr.
 sätt kan det hända

Väntat värde för neg. Bin.

$$E[X] = \frac{r}{p} = \frac{4}{0.1} = 40$$

Vad är sannolikheten att fjärde missen sker på sjunde kastet?

$$P(X=7) = f_X(7) = \binom{6}{3} 0.9^3 \cdot 0.1^4 = 20 \cdot 0.729 \cdot 0.0001 =$$

$$= 0.00146 \approx \underline{\underline{0.15\%}}$$

Antag att X är hypergeometriskt fördelad med $N=20$, $r=17$ och $n=5$

Vad är de möjliga värdena för X ?

Hypergeometrisk fördelning kan tänkas på som N objekt där r har en viss egenskap. Vi drar n av objekten och $X = \#$ objekt med egenskapen.

Då blir det enklare att se.

$$\max(0, n - (N - r)) < X < \min(n, r)$$

om det
är färre
utan egenskapen ($N-r$)
än vi drar n

Vad är $E[X]$?

Väntat värde för hypergeometrisk fördelning
fås som.

$$E[X] = n \frac{r}{N} = 5 \frac{17}{20} = \underline{\underline{\frac{17}{4}}}$$

antal vi drar $\nearrow$ andel med egenskapen

Vad är $\text{var}(X)$?

Variansen för en geometrisk fördelning
fås som

$$\text{Var}(X) = n \frac{r}{N} \left(\frac{N-r}{N} \right) \left(\frac{N-n}{N-1} \right) = 5 \frac{17}{20} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{15}{19} = \underline{\underline{0.503}}$$

3.62

Ett visst kärnkraftverk släpper ut radioaktiva gaser 2 ggr/månaden i genomsnitt.

Hitta sannolikheten att det är högst 4 utsläpp på en månad.

Detta kan ses som en Poisson fördelning

$X = \#$ utsläpp på en månad.

$X \sim \text{Poisson}(k)$ $k=2$

$$P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^4 \frac{e^{-k} k^x}{x!} = e^{-k} \sum_{x=0}^4 \frac{k^x}{x!} = e^{-2} \left(2^0 + 2^1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} \right)$$

$$= e^{-2} \left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} \right) = 0.947$$

Vad är det förväntade utsläppen under 3 månader?

$X' = \#$ utsläpp under 3 månader.

$X' \sim \text{Poi}(3 \cdot 2) = \text{Poi}(6)$

Väntat värde för poisson fördelning ger.

$$E(X') = 6$$

12 eller mer utsläpp observeras under 3 månader. Bör vi misstänka det rapporterade genomsnittet?

Vi söker alltså

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - e^{-6} \sum_{x=0}^{11} \frac{6^x}{x!} =$$

$$= \dots = 0,02$$

Sannolikheten för detta är 2%
alltså ganska liten. dvs Ja vi bör
misstänka det rapporterade genomsnittet.

3.64

Califonien slås av ca. 500 jordbävningar som kan märkas av per år. De som har möjlighet att förstöra kommer dock bara med medel en gång per år.

Hitta sannolikheten att en sådan jordbävning slår under en 6 månaders period.

X = # Jordbävningar under 6 månader

$X \sim \text{Poi}(0.5)$ Poisson fördelat
med $k = \lambda s = 1 \cdot 0.5 = 0.5$

$$P(X=1) = \frac{e^{-0.5} 0.5^1}{1!} = \frac{0.5}{e} = 0.3033... \approx \underline{\underline{0.30}}$$

Skulle det vara ovanligt att ha 3 eller mer jordbävningar av destruktiv magnitud under en 6 månaders period.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) =$$
$$= 1 - e^{-0.5} \left(1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} \right) = 1 - e^{-0.5} (1.625) =$$

$$= 1 - 0.9856 = 0.01438... \approx \underline{\underline{0.014}}$$

Ja ganska ovanligt 1,4%

3.68

En poisson fördelad slumpvariabel är sådan att $P(X=0) = P(X=1)$. Hitta k .

Tätheten för poissonfördelning ger oss att

$$P(X=0) = \frac{e^{-k} k^0}{0!}$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-k} k^1}{1!}$$

$$\frac{e^{-k} k^0}{0!} = \frac{e^{-k} k^1}{1!}$$

$$e^{-k} = e^{-k} k$$

$$\underline{\underline{k=1}}$$