

Kapitel 4

4.4

En del av platsen i skrotbilar kan rivas ut och återanvändas. Låt X beteckna mängden plat om kan återanvändas i en bil. Antag att tätheten för X ges av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x}, & 25 \leq x \leq 50 \\ 0, & x \notin [25, 50] \end{cases}$$

a) Verifiera att f är en täthet för en kontinuerlig slumpvariabel.

1. $f(x) \geq 0$ ok!

2. Är $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$?

Vi får kolla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{25}^{50} \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln 2} [\ln x]_{25}^{50} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (\ln 50 - \ln 25) = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{50}{25}\right) =$$

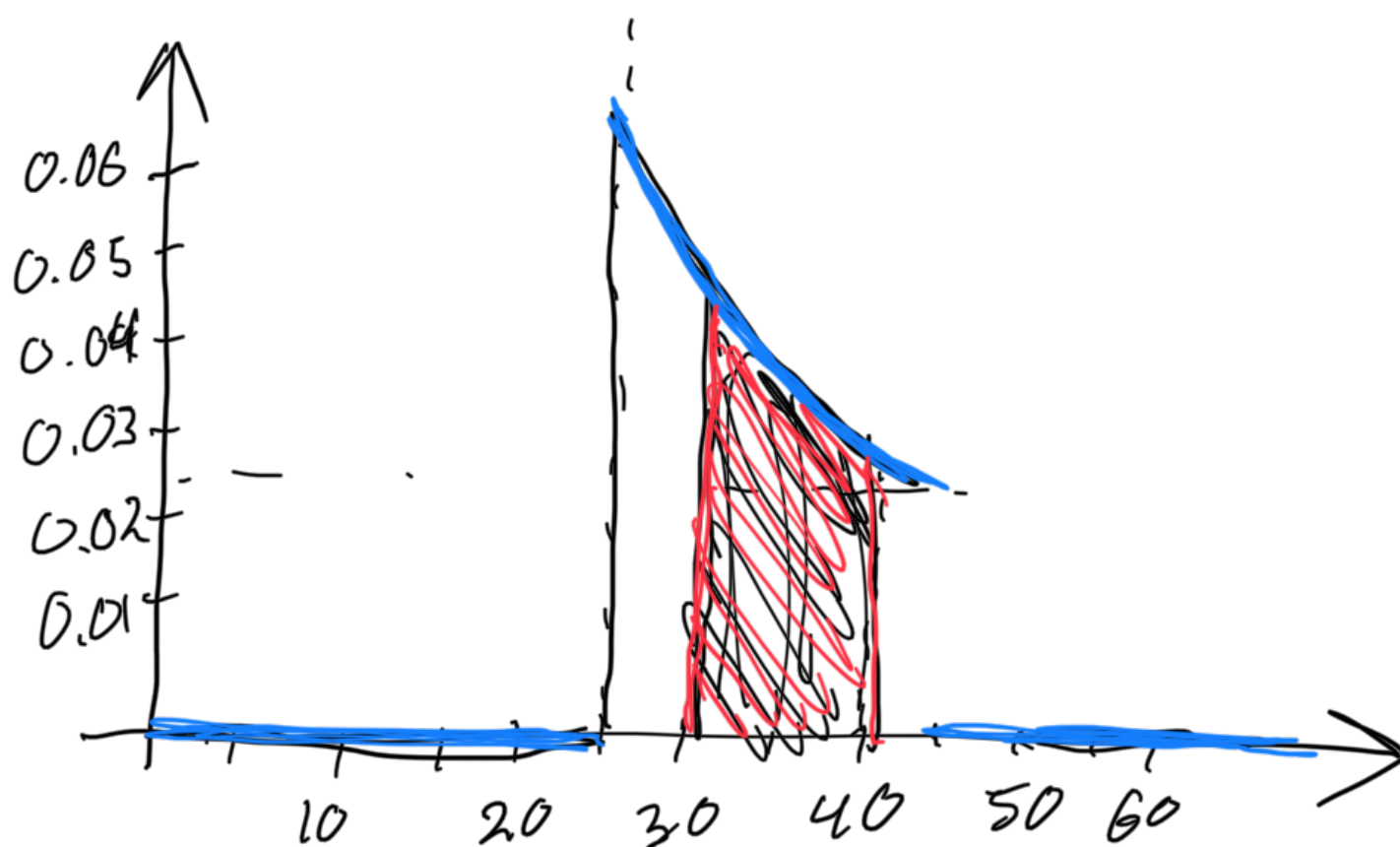
$$= \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1 \quad \text{ok!}$$

b) Hitta sannolikheten att en slumpmässigt vald bil innehåller mellan 30 och 40 punds plast.

Integrera över det sökta området.

$$P(30 \leq X \leq 40) = \int_{30}^{40} f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_{30}^{40} \frac{1}{x} dx =$$
$$= \frac{1}{\ln 2} (\ln 40 - \ln 30) = \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln 2} = \underline{\underline{0,415}}$$

c) skissa täthetsfunktionen och rita in sannolikheten från b).



4.10

Hitta den kumulativa fördelnings funktionen för en s.v. X , som är likformigt fördelad på intervallet (a,b) .

Hitta den kumulativa fördelnings funktionen för en s.v. X , som är likformigt fördelad på intervallet (a,b) $a < b$

Täthetsfunktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

Kumulativ fördelnings funktion:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dt, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

För (2)

$$\int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \underline{\underline{\frac{x-a}{b-a}}}$$

4.16

Låt X vara mängden plast i en skrotbil.

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{x} \quad 25 \leq x \leq 50$$

Hitta väntevärde, varians och standardavvikelse för X .

Väntevärde:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{25}^{50} x \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{x} dx =$$
$$= \int_{25}^{50} \frac{1}{\ln 2} dx = \frac{25}{\ln 2}$$

Varians:

Behöver $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{25}^{50} x^2 f(x) dx = \int_{25}^{50} x^2 \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \int_{25}^{50} x dx = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{25}^{50} = \frac{1}{2 \ln 2} (50^2 - 25^2) =$$

$$= \frac{1875}{2 \ln 2}$$

$$\underline{\underline{E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1875}{2 \ln 2} - \left(\frac{25}{\ln 2} \right)^2 =}}$$

$$= \frac{1875}{2 \ln 2} - \frac{25^2}{\ln 2^2} = 51,67$$

Standardavvikelse

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{51,67} = \underline{\underline{7,19}}$$

4.18

Tätheten för en slumpvariabel X som är likformigt fördelad på (a,b) är

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad \text{annars} \end{cases}$$

Använd def. 4.2.1

dr s.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Visa att

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

och

$$\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Väntevärde:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{1}{2} (b^2 - a^2) =$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \quad \text{V.S.V}$$

naïgon
kvadrerings
regel

Varians:

Behöver $E[X^2]$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \int x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{3(b-a)} (b^3 - a^3)$$

Sätt ihop

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = \dots = \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.24

Antag att den ökade efter frågan på el under kommande 2-årsperiod är en slumpvariabel X , med täthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{64} x^3 & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) Verifiera att detta är en täthet

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ok!}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{64} \int_0^4 x^3 dx = \frac{1}{64} \cdot \frac{4^4}{4} = \frac{1}{64} \cdot 64 = 1 \quad \text{ok!}$$

b) Hitta uttrycket för $F(x)$, den kumulativa fördelningsfunktionen.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x f(t) dt, & 0 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

För $x \in (0, 4)$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{64} t^3 dt = \frac{1}{64} \frac{x^4}{4} = \underline{\underline{\frac{x^4}{256}}}$$

c) om det i ett visst område går att öka produktionen med högst 3 GWH, vad är sannolikheten att efterfrågan kommer överskrida tillgången?

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{1}{256} 3^4 = \frac{175}{256} = 0.68$$

d) Hitta väntevärdet av ökningen.

$$E(X) = \frac{1}{64} \int_0^4 x \cdot x^3 dx = \frac{1}{64} \int_0^4 x^4 dx = \frac{1}{64} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \frac{1}{4^3} \cdot \frac{4^5}{5} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} = \underline{\underline{3.2}}$$

4.30

Låt X vara en gamma-fördelad slumpvariabel med parametrar " α " och " β ". Använd moment genererande funktionen för att hitta $E[x]$ och $E[x^2]$ samt $\text{Var}(X)$.

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

$$M_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

vi vet att:

$$E(X^k) = \left. \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \right|_{t=0}$$

Deriverar en gång:

$$\frac{d}{dt} (1 - \beta t)^{-\alpha} = -\alpha (1 - \beta t)^{-(\alpha+1)} \cdot (-\beta) = \alpha \beta (1 - \beta t)^{-(\alpha+1)}$$

$$\Rightarrow E(X) = \alpha \beta (1 - \beta t)^{-(\alpha+1)} \Big|_{t=0} = \alpha \beta$$

Deriverar en gång till:

$$\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) = \frac{d}{dt} \alpha \beta (1 - \beta t)^{-(\alpha+1)} =$$

$$= -\alpha \beta (\alpha+1) (1 - \beta t)^{-(\alpha+2)} \cdot (-\beta) =$$

$$= \alpha \beta^2 (\alpha+1) (1 - \beta t)^{-(\alpha+2)}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = \alpha \beta^2 (\alpha+1) (1 - \beta t)^{-(\alpha+2)} \Big|_{t=0} =$$

$$= \alpha \beta^2 (\alpha + 1) = \alpha^2 \beta^2 + \alpha \beta^2$$

$$\text{Var } X = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha^2 \beta^2 + \alpha \beta^2 - (\alpha \beta)^2 =$$

$$= \underline{\underline{\alpha \beta^2}}$$

4.34

Antag att ett kärnkraftverk släpper ut radioaktiva gaser i genomsnitt 2 ggr/månad. Hitta sannolikheten att det tar minst 3 månader innan första utsläppet. Vad är medeltiden man måste vänta innan första utsläppet.

$X = \# \text{ utsläpp under 3 mån} \sim \text{Poi}(k)$

där $k = \lambda \cdot S = 2 \cdot 3 = 6$

Söker

$$P(X=0) = \frac{k^0}{0!} e^{-k} = e^{-6} = \underline{0.00248}$$

Detta är sannolikheten att det tar 3 månader innan första utsläppet.

X poisson fördelad betyder att tiden mellan varje händelse är exponential fördelad. $\sim \text{Exp}(6)$

$$E[\text{Exp}(6)] = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{6} \cdot 3 \text{ månader} = \frac{1}{2} \text{ Månad}$$

I medel måste man vänta en halv månad.

Oljud i en gruva uppstår i genomsnitt 3 ggr/timme. Hitta sannolikheten att inget oljud uppstår under en 30 minuters period.

$$\# \text{ oljud/timme} \sim \text{Poisson}(3)$$

Notera att det även gäller att

Tiden mellan två oljud är exponentialfördelad med parameter $\beta = 1/3$

X = väntetid till nästa oljud

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = 3e^{-3x}$$

$$30 \text{ min} = 0.5 \text{ h}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(X \geq 0.5) &= 1 - P(X < 0.5) = 1 - (1 - e^{-3 \cdot 0.5}) = \\ &= e^{-3/2} \end{aligned}$$

Alternativt

$$X = \# \text{ oljud under } 30 \text{ min} \sim \text{Poi}(3/2)$$

$$P(X=0) = \frac{(3/2)^0}{0!} e^{-3/2} = \underline{\underline{e^{-3/2}}}$$

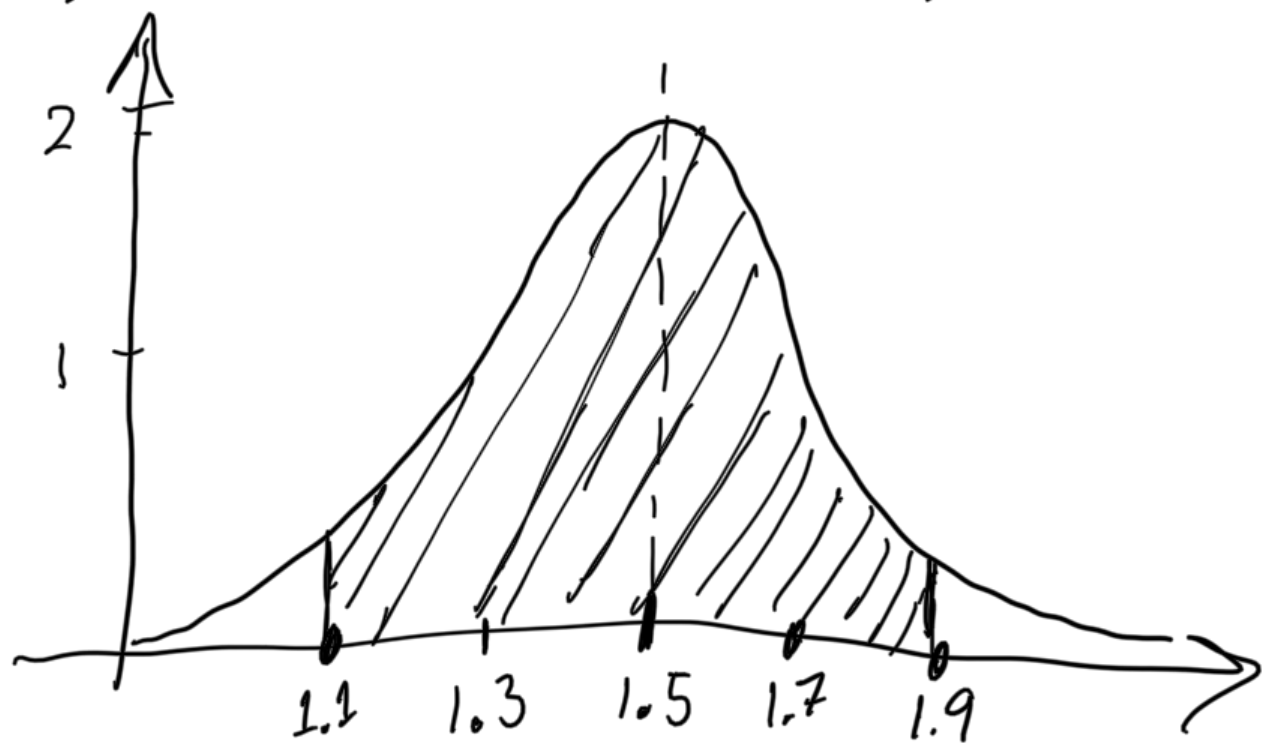
4.40

Låt X = densiteten för en viss typ av lera. Studier visar att X är normalfördelad med medel 1.5 och standardavvikelse 0.2 g /cm³.

a) Vad är tätheten för X ? Skissa tätheten och markera sannolikheten att $1.1 < X < 1.9$. Hitta sannolikheten.

$\bar{X}$ = densiteten för en viss typ av lera.

$X \sim \text{normal}(1.5, 0.2)$



Räkna ut denna sannolikhet.

$$\begin{aligned} P(1.1 \leq \bar{X} \leq 1.9) &= P(-0.4 \leq \bar{X} - 1.5 \leq 0.4) = \\ &= P\left(-2 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq 2\right) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq 2\right) - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \leq -2\right) = \\ &= F_2(2) - F_2(-2) = 1 - 2F_2(2) = \\ &= \{ \text{Tabell} \} = 1 - 2 \cdot 0.0228 = 0.9544 \end{aligned}$$

Skriver alltså på denna standard form $\text{norm}(0,1)$ för att sedan kunna slå upp i tabell värde.

4.50

För en normalfördelad slumpvariabel är

$$P(|X - \mu| < 3\sigma) \approx 0.997$$

Vilket värde får Chebyshevs olikhet?

Chebyshevs:

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

I vårt fall

$$P(|X - \mu| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} = 0.89$$

Är dessa resultat konsistenta?

Ja $0.89 < 0.997$ så Chebyshev motsäger inte tumregeln.

Vilket resultat är starkast?

Tumregeln även om den inte ger någon undre gräns.

4.54

En kemisk reaktion körs med en vanlig produktion på 70%. En ny process har hittats som ska öka produktionen. Förespråkarna för den nya processen hävdar att den ska ge högre produktion mer än 90% av gångerna. Den nya processen testas 60 gånger. Låt X beteckna antalet gånger där produktion överskrider 70%.

a) om sannolikheten för en ökad produktion är 0.9 är normal approximation rimligt?

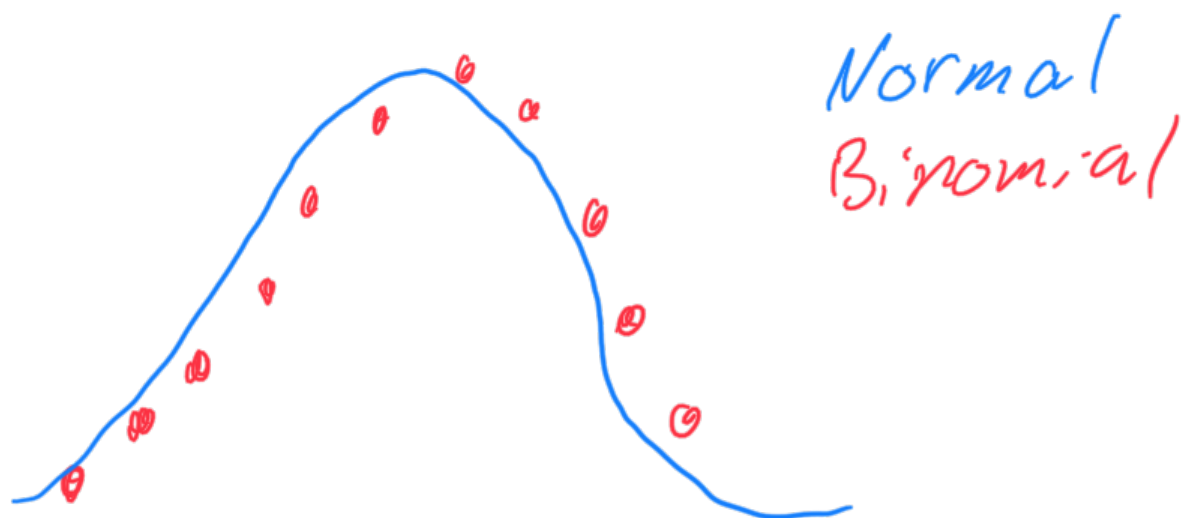
$$X \sim \text{Binomial}(60, 0.9), \quad p=0.9, \quad n=60$$

Normal approximation kan göras om $p \approx 0.5$ eller n stort.

Här har vi att p inte är nära 0.5 men n är stort ($n > 20$).

Det blir alltså en god approximation

$$\text{Ungefär } \text{Normal}(n \cdot p, n \cdot p(1-p)) = \\ = \text{Normal}(54, 5.4)$$



b) om $p=0.9$ vad bli då väntevärdet för X ?

$$X \sim \text{Bin}(60, 0.9)$$

$$E(X) = 60 \cdot 0.9 = 54$$

c) om $p > 0.9$ som påstås borde testet resultera i mer än 54 oftast. Låt oss säga att vi accepterar påståendet om X åtminstone 59. Vad är då sannolikheten att vi accepterar påståendet om $p = 0.9$?

$$P(X \geq 59) = \sum_{x=59}^{60} \binom{60}{x} 0.9^x (1-0.9)^{60-x} =$$

$$= 60 \cdot 0.9^{59} \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.9^{60} \approx 0.01378 \approx 1.4\%$$

Alltså väldigt lågt om $p = 0.9$

d) vad är sannolikheten att vi inte accepterar påståendet ($X \leq 58$) om $p = 0.95$?

$$P(X \leq 58) = 1 - P(X \geq 59) =$$

Nu gör vi samma som ovan med $p = 0.95$

$$= 1 - \sum_{x=59}^{60} \binom{60}{x} 0.95^x (1-0.95)^{60-x} =$$

$$= 1 - 60 \cdot 0.95^{59} \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.95^{60} = 1 - 0.1915 \approx$$

$$\approx 0.81$$

Alltså ca. 80% att vi inte accepterar med $p = 0.95$ och kravet ($X \geq 59$).

Betrakta felintensiteten

$$p(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$$

a) Visa att felintensiteten är konstant om $\beta = 1$

$$p(t) = \alpha \cdot 1 t^{1-1} = \alpha t^0 = \alpha \Rightarrow \text{konstant}$$

b) Hitta

$$p'(t)$$

och visa att

$$p'(t) > 0 \iff \beta > 1$$

$$p'(t) < 0 \iff \beta < 1$$

$$p'(t) = (\beta - 1) \alpha \beta t^{\beta-2}$$

$$\alpha, \beta, t > 0 \implies \alpha \beta t^{\beta-2} > 0$$

$$\beta - 1 > 0 \iff \beta > 1$$

$$\beta - 1 < 0 \iff \beta < 1$$

4.66

Ett system består av två oberoende serie kopplade komponenter.

Livstiden för den första följer weibullfördelning med $\alpha = 0.006$ och $\beta = 0.5$.

Den andra följer en exponentialfördelning med $\lambda = 25000$

a) Hitta $R(2500)$ sannolikheten att systemet fungerar efter 2500 h

För ett serie kopplat system

$$P(\text{system fungerar}) = P(\text{komp. 1 fungerar}) \cdot P(\text{komp. 2 fungerar})$$

$$R_{\text{sys}}(t) = R_1(t) \cdot R_2(t)$$

R - "reliability"

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{tidigare} \\ \text{uppgift} \end{array} \right\} = e^{-\alpha t^\beta} = e^{-0.006 \sqrt{t}}$$

$$R_2 = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-t/25000}) = e^{-t \cdot 0.00004}$$

$$R_{\text{sys}} = R_1 \cdot R_2 = e^{-0.006 \sqrt{t} - 0.00004t}$$

$$R_{\text{sys}}(2500) = 0.67$$

b) vad är sannolikheten att systemet slutar fungera innan 2000 h?

$$1 - R_{\text{sys}}(2000) = 1 - e^{-(0.006 \cdot \sqrt{2000} + 2/25)} = 0.29$$

c) om komponenterna är parallell kopplade vad är sannolikheten att den fungerar efter 2500 h?

$$R_{sys} = 1 - P(\text{Alla är trasiga}) =$$

$$= 1 - (1 - R_1)(1 - R_2)$$

$$R_{sys}(2500) = 1 - (1 - e^{-0.006\sqrt{2500}})(1 - e^{-\frac{2500}{25000}}) =$$

$$= \underline{\underline{0.975}}$$

4.68

Tre oberoende komponenter används i ett system, var och en fungerar med sannolikhet 0.9.

a) systemet fungerar om minst en fungerar. Vad är sannolikheten att systemet fungerar?

$$P(\text{fungerar}) = P(\text{minst 1 fungerar}) = \\ = 1 - P(\text{alla trasiga}) = 1 - 0.1^3 = 1 - 10^{-3} = \underline{\underline{0.999}}$$

b) om systemet fungerar då minst två fungerar

$X = \#$ som fungerar

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$P(X = 3) = 0.9^3$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} 0.9^2 \cdot 0.1 = 3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.3 \cdot 0.9^2$$

$$P(X \geq 2) = 0.9^3 + 0.3 \cdot 0.9^2 = \underline{\underline{0.972}}$$

c) fungerar om alla fungerar

$$P(\text{fungerar}) = 0.9^3 = 0.729$$

4.70

Låt X vara s.v. Med

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & , 0 \leq x \leq \sqrt{8} \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$

och låt $Y = X + 3$

a) Hitta $E[X]$ och använd det för att hitta $E[Y]$.

$$E[X] = \int_0^{\sqrt{8}} x \cdot \frac{x}{4} dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{12} 8^{3/2}$$

$$E[Y] = E[X + 3] = E[X] + 3 = \underline{\underline{\frac{8^{3/2}}{12} + 3}}$$

b) Hitta tätheten för Y .

$$I = g(X), \quad g(X) = X + 3$$

$$f_I(x) = f_X(g^{-1}(x)) \left| \frac{dg^{-1}(x)}{dx} \right|$$

$$\text{Vi har } g^{-1}(X) = X - 3$$

$$\frac{dg^{-1}(x)}{dx} = 1$$

$$f_I(x) = \begin{cases} f_X(x-3) \cdot 1 = \frac{1}{4}(x-3), & 3 \leq x \leq \sqrt{8}+3 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

c) Använd detta för att hitta väntevärde för Y.

$$\begin{aligned} E[I] &= \int_3^{\sqrt{8}+3} x \frac{1}{4}(x-3) dx = \frac{1}{4} \int_3^{\sqrt{8}+3} (x^2 - 3x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_3^{\sqrt{8}+3} = \frac{1}{4} \left(\frac{(\sqrt{8}+3)^3}{3} - \frac{3}{2}(\sqrt{8}+3)^2 - \frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 9}{2} \right) = \\ &= 00000 = \frac{8^{3/2}}{12} + 3 \end{aligned}$$

Alltså samma som i a) ☺