6.12

Den n:te percentilen för en slumpvariabel X skrivs som p_n/100 (n=1,2,...) och definieras genom

$$P(X < P_{n/100}) \leq \frac{n}{100} \quad \text{och} \quad P(X \leq P_{n/100}) \geq \frac{n}{100}$$

Exempel: X~bino(n=20,p=0.5)

$$\Rightarrow P_{\frac{25}{100}} = 8$$

Då tabell 1 appendix A ger att

$$P(X < 8) = 0.1316 \leq 0.25$$

och

$$P(X \leq 8) = 0.2517 \geq 0.25$$

altså $P_{\frac{25}{100}} = 8$

a) Låt X~bino(n=20, p=0.5). Hitta P_60/100

$P_{\frac{60}{100}}$ Hitta tabell för $F_X(t)$ $X \sim Bin(n=20, p=0.5)$

Tabell I Apendix A

$n=20$

t	p = 0,4	0,5	0,6	0,7 ...
9		0,4114		
10		0,5881		
11		0,7483		
12		0,8684		
13		0,942		

$F_X(t) = P(X \leq t)$, $P(X < t) = F_X(t-1)$ $t \geq 1$

$P(X < 11) = F_X(10) = 0.5881 \leq 0.6$

$P(X \leq 11) = F_X(11) = 0.7483 \geq 0.6$

$\Rightarrow P_{\frac{60}{100}} = 11$

b) Låt X~Poi(X) landa*s=10. Hitta P_30/100.

$X \sim Poi(\lambda s = 10)$

$P_{30/100}$

	λs		
t	9	10	11
7		0.220	
8		0.333	
9		0.458	

$P(X < 8) = P(X \leq 7) = 0.22 \leq 0.3$

$P(X \leq 8) = 0.333 \geq 0.3$

Alltså är $\underline{P_{30/100} = 8}$

c) Argumentera för att den n:te percentilen i det kontinuerliga fallet är talet P_n/100 sådant att

$$P(X \leq P_{n/100}) = \frac{n}{100}$$

Tidigare def:

$$P(X < P_{n/100}) \leq \frac{n}{100}$$

$$P(X \geq P_{n/100}) \geq \frac{n}{100}$$

I det kontinuerliga fallet blir

$$P(X < P_{n/100}) = P(X \leq P_{n/100})$$

Detta efterso sannolikheten för exakt $P_{n/100}$ är noll $P(X = P_{n/100}) = 0$

$$P(X < P_{n/100}) = P(X \leq P_{n/100})$$

$$P(X < P_{n/100}) = P(X < P_{n/100}) + P(X = P_{n/100})$$

$$P(X < P_{n/100}) = P(X < P_{n/100}) + 0$$

Alltså lika.

Så $P_{\frac{n}{100}}$ måste uppfylla.

$$P(X \leq P_{n/100}) = n/100$$

d) Låt X~exp(beta), beta=1. Visa att den 20e percentilen är -ln(0.8).

$X \sim exp(B), \quad B = 1$

$$P(X \leq x) = F(x) = 1 - e^{-x/B} = 1 - e^{-x}$$

$$P(X \leq P_{20/100}) = 0.20$$

Altsa:

$$1 - e^{-P_{20/100}} = 0.20$$

$$e^{-P_{20/100}} = 0.8$$

$$\underline{P_{20/100} = -\ln 0.8} \quad V.S.V$$

6.18

Låt slumpvariabeln X representera livstid för litiumbatterier i h. Vi har 50 sampels och får värdena

$$\sum_{i=1}^{50} X_i = 63707$$

$$\sum_{i=1}^{50} X_i^2 = 154924261$$

a) skulle du bli förvånad om någon påstod att genomsnitt livslängden är 1270 h?

Medelvärdet för vårat sample:

$$\bar{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = \frac{63707}{50} = 1274$$

Verkar som ett rimligt påstående.

Vi kommer räkna osäkerheten i vår mätning i b).

b) Hitta stickprovs variansen och stickprovs standardavvikelsen.

sample varians:

$$s^2 = \{\text{Thm. } 6.3.1.\} = \frac{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)} =$$

$$= \frac{50 \cdot 154924261 - (63707)^2}{50 \cdot 49} = 1505176$$

standardavvikelse

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1505176} = \underline{\underline{1226.856}}$$

Kapitel 7
7.2

Låt X1,...,X20 vara ett stickprov från en fördelning med väntevärde 8 och varians 5. Hitta väntevärdet och varians för medelvärdet hos stickprovet Xbar.

Hitta

$E(\bar{X})$

$Var(\bar{X})$

Där $\bar{X} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i$

Från Texten

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{20} E\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = \{E(X_i)=8\} =$$

$$= \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} 8 = \frac{1}{20} 20 \cdot 8 = \underline{\underline{8}}$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \{Var(aX) = a^2 Var(X)\} =$$

$$= \frac{1}{20^2} Var\left(\sum_{i=1}^{20} X_i\right) = \{X_i \text{ oberoende} \Rightarrow Var(\Sigma X_i) = \Sigma Var(X_i)\}$$

$$= \frac{1}{20^2} \sum_{i=1}^{20} Var(X_i) = \frac{1}{20^2} \sum_{i=1}^{20} 5 = \frac{5 \cdot 20}{20^2} = \frac{5}{20} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

7.4

Ett datorsystem finns tillgängligt för beställning. Låt X beteckna antalet beställningar per timme och antag att

$X \sim Poi(\lambda s)$

Följande data har observerats.

25 20 20
30 24 15
10 23 4

Beställningar på en timme

a) Hitta en väntevärdesriktigskattare för landa*s

Vi noterar att

$$X \sim Poi(\lambda s) \Rightarrow \mu = E[X] = \lambda s \quad *$$

Vänte värdes riktig om skattaren $\hat{\lambda s}$ har vänte värdet λs.

$$E(\hat{\lambda s}) = \lambda s$$

Så vi skattar λs med medelvärdet $\bar{X}$ som för Poi. har vänte värdet λs. (*)

$$\bar{X} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} X_i = 19 \Rightarrow \hat{\lambda s} = 19$$

skattas till 19.

b) Hitta en väntevärdesriktig skattning för antalet beställningar per timme.

λ = # beställningar per timme

1h period

$\lambda s = \lambda \cdot 1 = \lambda$

$\hat{\lambda} = 19$

c) Hitta en väntevärdesriktig snattare för antal beställningar per kvart.

Har observerat 9 timmar = 36 kvartar

$$\frac{1}{36} \sum X_i = 4{,}75$$

alternativt $\frac{1}{4} \cdot \hat{\lambda} = 4.75.$

7.8

Notera att sampel standard avvikelsen s varierar mellan samples. Alltså Var(s)>0.

Visa att. s inte är någon väntevärdesriktig skattade för sigma genom motsägelse bevis.

s inte väntevärdes riktig för σ

$S = \sqrt{S^2}$ S^2 är sample variansen.

Vi antar $E[S] = \sigma$

Vi vet även att $E[S^2] = \sigma^2$

$$var(s) = E[S^2] - (E[S])^2 = \sigma^2 - (\sigma)^2 = 0$$

Antagande och vi vet

Alltså kan inte $E[S] = \sigma$ om inte $var(s) = 0$ vilket inte är sant. Förutom för konstana slumpvariabler

$X = konst.$

7.16

Låt X1,...,Xn vara ett random sample från en binomial fördelning med känd parameter n, och okänt p. Visa att Methods of moments estimator för p är

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$$

Method of moments:

Skriv parametern som ska skattas som en funktion av moment.

I vårt fall:

$E[X] = np$ första momentet.

$$M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

$$p = \frac{E[X]}{n}$$

ersätter $E[X] = \bar{X}$

$$\hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$$ VSV.

7.20

I ett försök blandar man syra lösningar. Låt X beteckna pH-värdet i lösningen. Antag att

$$X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$$

Använd method of moments för att skata alpha, beta, mu, sigma^2 givet data.

Skatta $\alpha, \beta, \mu, \sigma^2$ givet följande data

1.2 2.0 1.6 1.8 1.1
2.5 2.1 2.6 2.2 1.7
1.5 1.7 2.0 3.0 1.8

$$\left.\begin{aligned} \mu &= E[X] = \alpha\beta \\ \sigma^2 &= E[X^2] - (E[X])^2 = \alpha\beta^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{\sigma^2}{\mu} = \dfrac{E[X^2] - (E[X])^2}{E[X]} \\[2ex] \alpha = \dfrac{\mu^2}{\sigma^2} = \dfrac{(E[X])^2}{E[X^2] - (E[X])^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\beta} = \dfrac{M_2 - M_1^2}{M_1} \\[2ex] \hat{\alpha} = \dfrac{M_1^2}{M_2 - M_1^2} \end{cases}$$

$$M_1 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} X_i = 1{,}920$$

$$M_2 = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} X_i^2 = 3.932$$

$$\hat{\beta} = \frac{3.932 - 1{,}920^2}{1.920} = 0.128$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1.920}{3.932 - 1.920^2} = 15.010$$

slutligen $\hat{\mu} = \hat{\alpha}\hat{\beta} = 1.92$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\alpha}\hat{\beta}^2 = 0.2456$$

7.30

Låt X1,...,Xm vara ett random sample från en binomial fördelning med känt n och okänt p. Hitta maximum liklihod estimator för p.

Hitta $L(p) = P[X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m] =$

$$= \prod_{i=1}^{m} P[X_i = x_i]$$

$\Longleftarrow$ PLAN

Tar $\ln(L(p))$ ist

och sen deriverar o. sätter till 0,

lös för p.

$$P[X_i = x_i] = \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(p) = \prod_{i=1}^{m} \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} =$$

$$= p^{\sum_{i=1}^{m} x_i} (1-p)^{n \cdot m - \sum_{i=1}^{m} x_i} \prod_{i=1}^{m} \binom{n}{x_i}$$

Tar $\ln(L(p))$

$$\ln(L(p)) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \ln(p) + \left(nm - \sum_{i=1}^{m} x_i\right) \ln(1-p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \ln\left(\binom{n}{x_i}\right)$$

Derivera för att hitt max

$$\frac{d\ln(L(p))}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{p} - \frac{nm - \sum_{i=1}^{m} x_i}{1-p}$$

$$\frac{d\ln(L(p))}{dp} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{p} = \frac{nm - \sum_{i=1}^{m} x_i}{1-p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-p)\sum_{i=1}^{m} x_i = p\left(nm - \sum_{i=1}^{m} x_i\right)$$

$$\sum x_i - \cancel{p\sum x_i} = pnm - \cancel{p\sum x_i}$$

$$\sum x_i = pnm$$

$$p = \frac{\sum x_i}{nm} \qquad \bar{X} = \frac{\sum x_i}{m}$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{x}}{n}$$

Samma som MME

NR 7.16.

7.34

Beteckna livslängden för backup batteriet i en dator med X. Där X är exponentialfördelad med parameter beta. Hitta maximum likelihood estimator för beta givet data.

Har 20 samples, ska hitta β som maximerar

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{20} f(x_i)$$

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{20} f(x_i) = \prod_{i=1}^{20} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x_i}{\beta}} = \frac{1}{\beta^{20}} e^{-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{20} x_i} \Rightarrow$$

<u>logaritmerar</u>

$$\ln L(\beta) = -20 \ln(\beta) - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

Derivera för att hitta max.

$$\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{-20}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{20} x_i = 0$$

$$\frac{20}{\beta} = \frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

$$\beta = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \bar{x} = 2.995$$

data

7.38

Låt X vara en slumpvariabel med mgf

$$m_X(t)$$

och

$$Y = \alpha + \beta X$$

a) visa att

$$m_Y(t) = e^{\alpha t} m_X(\beta t)$$

$$m_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{(\alpha+\beta X)t}] =$$

$$= E[e^{\alpha t} e^{\beta t X}] = e^{\alpha t} E[e^{(\beta t)X}] = e^{\alpha t} m_X(\beta t)$$

b) Låt X~N(10,4) och Y = 8 + 3X. Hitta mY(t).

Söker

$m_Z(t)$

mgf för normal fördelningar

$$\Rightarrow m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{10t + 2t^2}$$

Från a) vet vi hur addition och mult. med konstant beter sig.

$$m_Z(t) = e^{8t} m_X(3t) = e^{8t} \cdot e^{10 \cdot 3t + \frac{9 \cdot 9t^2}{2}} =$$

$$= e^{38t + 18t^2}$$

Vilken fördelning har Z?

Kan se på m_Z att $Z \sim N(38, 36)$

m_Z mgf för normal.

7.46

Låt

X=tid det tar att göra en beräkning med algoritm A

Y=tid det tar att göra en beräkning med algoritm B

Antag X och Y oberoende samt X~N(10,3) och Y~N(9,4).

a) Vad är fördelningen för X-Y?

Låt $W = X - Y$ och betrakta $m_W(t)$

$$m_W(t) = E[e^{Wt}] = E[e^{(X-Y)t}] = E[e^{Xt}]E[e^{-Yt}] =$$

$$= m_X(t) \cdot m_Y(-t) = e^{10t + \frac{9t^2}{2}} \cdot e^{-9t + \frac{16t^2}{2}} =$$

$$= e^{t + \frac{25t^2}{2}} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Alltså blir

$X - Y \sim N(1, 25)$

b) Vad är sannolikheten att en beräkning går snabbare med algoritm A än med B?

Detta är $P(X < Y) = P(X - Y < 0) =$

$$= P\left(\underbrace{\frac{(X-Y)-1}{5}}_{\sim N(0,1)} < -1/5\right) = \{\text{tabell v}\} = 0.4207$$

7.48

X = tid från strålning till peak i hudrodnad i dagar.

Data

16	12	14	16	13	9	15	7
20	19	11	14	9	13	11	3
8	21	16	16	12	16	14	20
7	14	18	14	18	13	11	16
18	16	11	13	14	16	15	15

a) rita ett stapel digagram och avgör om X tycks vara normal fördelat.

0-5	0	3
6-9	0	9 7 9 8 7
10-14	1	2 4 3 1 4 3 1 2 4 4 4 3 1 1 3 4
15-19	1	6 6 5 9 6 6 6 8 8 6 8 8 6 5 5
20-25	2	0 1 0

Ser ut att kunna vara normal fördelat.

b) beräkna Xbar.

$\bar{X} = 13.85$

c) Antag att sigma=4 och hitta ett 95% - konfidens intervall för medelvärdet mu. Skulle du bli förvånad om någon påstod att mu=17? Motivera baserat på C.I.

$\sigma = 4$

Hitta 95%-konfidensintervall för μ.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Vill ha ett intervall (L_1, L_2) sådant att

$$P(\mu \in [L_1, L_2]) = 0.95$$

Vi utgår från Z eftersom vi vet $Z \sim N(0,1)$

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96\right) = 0.95$$

$$P\left(-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}-\mu \leq 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$P\left(\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

med $\bar{X} = 13,85$, $\sigma = 4$ och $n = 40$ fås

$$P(12,61 \leq \mu \leq 15.09) = 0.95$$

med 95% sannolikhet ligger μ innom $[12,61, 15,09]$.

17 ligger inte i intervallet låg sannolikhet för detta skulle bli förvånad.

7.50

Betrakta en oändlig population där elementen har värden 1,2,3 eller 4 i lika proportioner. Om X är värdet på ett slumpvis valt element så är X en diskret slumpvariabel.

a)Hitta mu och sigma^2 för X.

$$\mu = \sum_{k=1}^{4} k\,P(X=k) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1+4+9+16}{4} - 2.5^2 =$$

$$= \frac{30}{4} - 2.5^2 = \underline{\underline{1.25}}$$

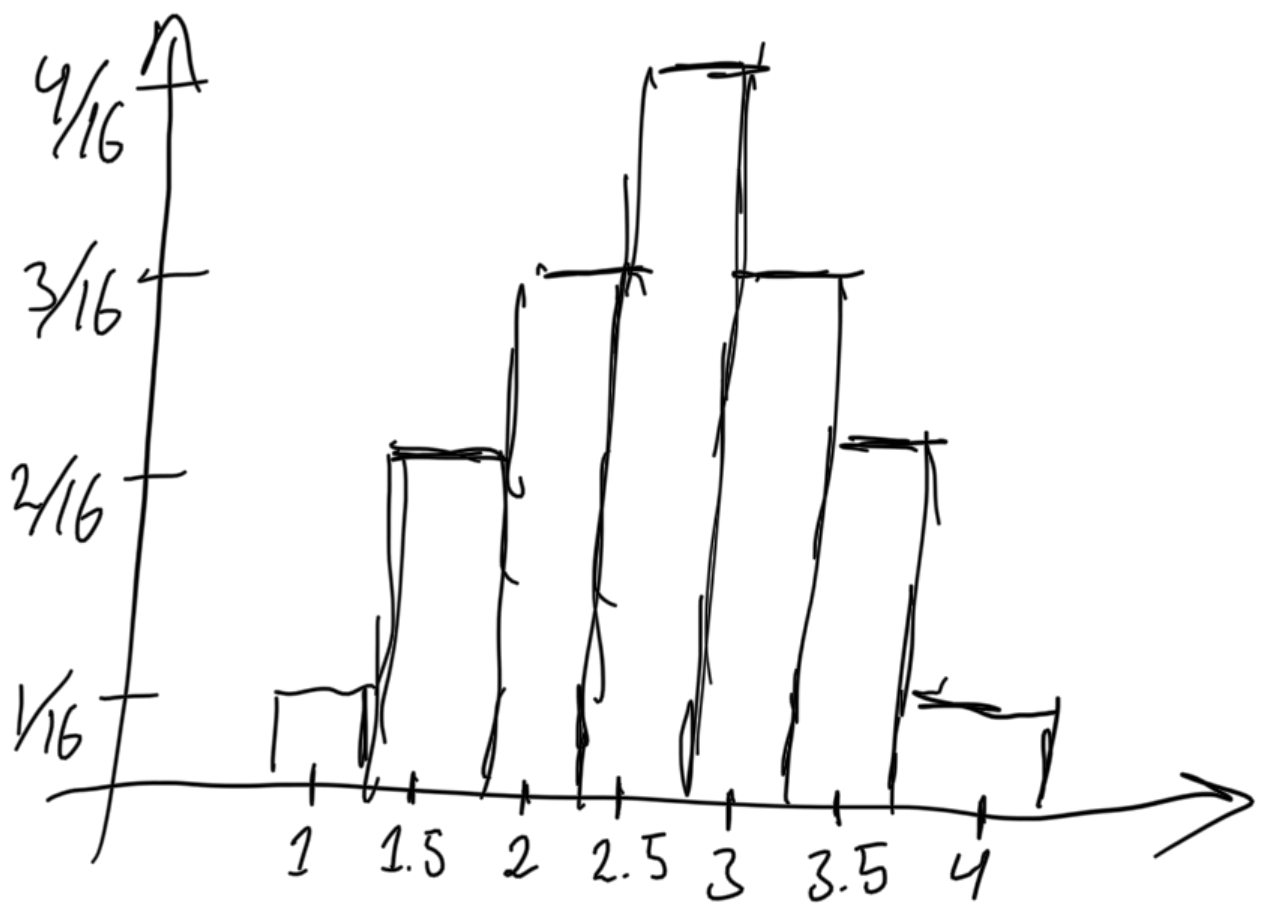
b) Lista alla 16 möjliga samples med 2 element och beräkna Xbar för alla fall. Illustrera Xbar med ett histogram, där höjden på stapeln är sannolikheten för utfallet.

16 utfall: $\bar{X}$

(1, 1) 1	(2, 1) 1.5	(3, 1) 2	(4, 1) 2.5
(1, 2) 1,5	(2, 2) 2	(3, 2) 2.5	(4, 2) 3
(1, 3) 2	(2, 3) 2.5	(3, 3) 3	(4, 3) 3.5
(1, 4) 2.5	(2, 4) 3	(3, 4) 3.5	(4, 4) 4

7 utfall för $\bar{X}$

$\bar{X}$	frekvens
1	1
1.5	2
2	3
2.5	4
3	3
3.5	2
4	1
	16



c) Beräkna väntevärdet och varians för Xbar och visa att det är mu och sigma^2/n som väntat för sampels.

Väntevärde för $\bar{X}$ och varians för $\bar{X}$.

Visa att det är μ och σ^2/n $(n=2)$.

$$E(\bar{X}) = (1\cdot 1 + 2\cdot 1.5 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2.5 + 3\cdot 3 + 2\cdot 3.5 + 1\cdot 4)\frac{1}{16} =$$

$= 2.5$ ok!

$$E[\bar{X}^2] = (1\cdot 1^2 + 2\cdot 1.5^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2.5^2 \ldots + 1\cdot 4^2)\frac{1}{16} =$$

$= 6.875$

$$Var(\bar{X}) = 6.875 - 2.5^2 = 0.625 = \frac{1.25}{2}$$

alltså $\frac{\sigma^2}{n}$ stämmer.