## <u>Kapitel 8: "Inferences on the Mean and Variance"</u> 8.1

("Inference" betyder (statistisk) slutledning.)

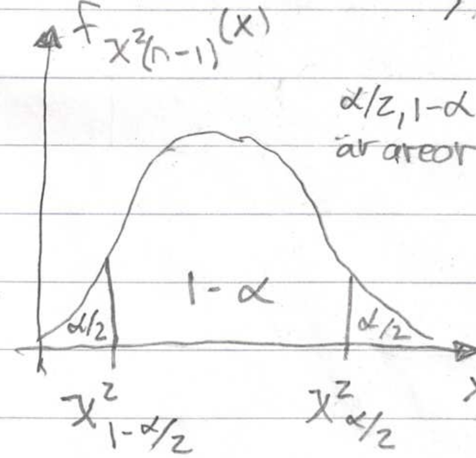
(I kapitel 8 börjar vi med metoder för slutledning om väntevärde och varians. Även kapitel 8 är ganska långt.)

$X_1, \dots, X_n$ är observationer av $N(\mu, \sigma^2)$ (ända till slutet kapitel 8)

<u>Definition</u> $(n-1)S^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2/\sigma^2$

kallas $\chi^2(n-1)$-fördelad ($\chi^2$-fördelad med $n-1$ frihetsgrader).

(I boken talas kort om $\chi^2$-fördelning i kapitel 4 men det kan ni hoppa över.)




$\chi^2$-fördelade stokastiska variabler är positiva.

I bokens tabell IV finner man talet $\chi^2_\gamma$ sådant att

$$P(\chi^2(n-1) > \chi^2_\gamma) = \gamma \quad \text{för } \gamma \text{ nära 0 och 1.}$$

<u>Sats</u> $\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right]$ med konfidensgrad $1-\alpha$.

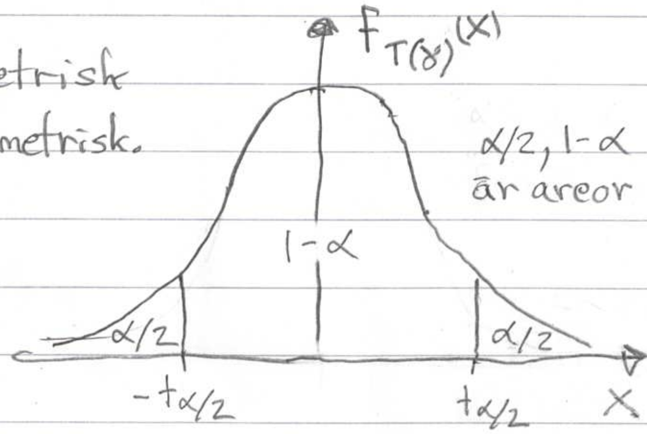
<u>Bevis</u> Händelsen ovan är samma sak som $\chi^2_{1-\alpha/2} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2}$ $\square$

**Definition** Om $Z$ är $N(0,1)$ (stokastisk variabel) och $X_\gamma^2$ är oberoende $\chi^2(\gamma)$ (stokastisk variabel) är

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X_\gamma^2/\gamma}} \quad T(\gamma)\text{-fördelad}$$

(T-fördelad med $\gamma$ frihetsgrader)

Eftersom $N(0,1)$ är symmetrisk (kring 0) är även $T(\gamma)$ symmetrisk.




$\alpha/2, 1-\alpha$ är areor

I boken tabell VI finner man talet $t_{\alpha/2}$ sådant att

$$P(T(\gamma) \geq t_{\alpha/2}) = P(T(\gamma) \leq -t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

**Sats** $(\bar{X}-\mu)/(S/\sqrt{n})$ är $T(n-1)$ (-fördelad)

**Bevis** Följer direkt av definitionen ovan ty

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ är } N(0,1) \\ \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \text{ är } \chi^2(n-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \text{ är } T(n-1). \quad \square$$

(n-1) frihetsgrader

**Sats** $\mu \in \bar{X} \pm t_{\alpha/2} S/\sqrt{n}$ med konfidensgrad $1-\alpha$

**Bevis** Händelsen ovan är samma som

$$-t_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2} \quad \square$$

# Hypotestest

(Jag har tidigare lärt ut om skattning och konfidensintervall. Nu kommer ett nytt viktigt begrepp hypotestest som visar sig höra nära ihop med konfidensintervall (ofta).)

* Vi önskar testa en hypotes angående det okända värdet för en parameter för vårt datamaterial. $\boxed{H_0 : \theta = \theta_0}$

(Våra data är för närvarande $X_1, \dots, X_n$ $N(\mu, \sigma^2)$.)

* Vi är intresserad av testa en av tre slags möjliga avviklelser från hypotesen $H_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_0$ tvåsidig test

$H_1 : \theta > \theta_0$
$H_1 : \theta < \theta_0$ } ensidiga tester

* Vi kan göra två slags fel då vi gör testen

**Definition**
Typ I-fel $= \alpha =$ P($H_0$ förkastas då $H_0$ sann)
Typ II-fel $= \beta =$ P($H_0$ godtages då $H_0$ falsk)

(Allmänt gäller att om testen modifieras med bibehållen stickprovsstorlek n så ena felet minskar så ökar andra felet.)

(Enda sättet minska båda felen samtidigt är öka n.)

**Definition** styrka $= 1 - \beta =$ P($H_0$ förkastas då $H_0$ falsk)

*

Vi önskar testa $\boxed{H_0: \mu = \mu_0}$ mot en av $\boxed{\begin{matrix} H_1: \mu \neq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{matrix}}$

(För vårt stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på $N(\mu, \sigma^2)$)

**Sats**

Förkasta $H_0$ om $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \notin \begin{cases} [-t_{\alpha/2}, t_{\alpha/2}] \\ (-\infty, t_\alpha] \\ [-t_\alpha, \infty) \end{cases}$ har $\alpha$-fel $\alpha$.

$n-1$ frihetsgrader

(Om $H_0$ ej förkastas enligt satsen så godtages $H_0$.)

**Bevis** $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ är $T(n-1)$ (fördelad) då $H_0$ sann

så då är sannolikheten $\alpha$ att $\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \notin$ intervallen

så att $H_0$ förkastas då $H_0$ sann. $\square$

(Notera att med samma $\alpha$-fel är de tre varianterna av testen designade att upptäcka avvikelser från $\mu = \mu_0$ av typ $\mu \neq \mu_0$, $\mu > \mu_0$ respektive $\mu < \mu_0$ eftersom i dessa tre fall även $\bar{X}$ tenderar $\neq \mu_0$, $> \mu_0$ resp $< \mu_0$.)

*

Vi önskar testa $\boxed{H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2}$ mot en av $\boxed{\begin{array}{l} H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}}$

(För vårt stickprov $X_1, \ldots, X_n$ på $N(\mu, \sigma^2)$)

**Sats**

Förkasta $H_0$ om $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \notin \begin{cases} [\chi^2_{1-\alpha/2}, \chi^2_{\alpha/2}] \\ (0, \chi^2_{\alpha}] \\ [\chi^2_{1-\alpha}, \infty) \end{cases}$ har $\alpha$-fel $\alpha$.

(Om $H_0$ ej förkastas enligt satsen så godtages $H_0$.)

**Bevis** $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ är $\chi^2(n-1)$ (fördelad) då $H_0$ sann

så då är sannolikheten $\alpha$ att $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \notin$ intervallen

så att $H_0$ förkastas då $H_0$ sann. $\square$

(Notera att med samma $\alpha$-fel är de tre varianterna av testen designade att upptäcka avvikelser från $\sigma^2 = \sigma_0^2$ av typ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, $\sigma^2 > \sigma_0^2$ resp. $\sigma^2 < \sigma_0^2$ ty i dessa tre fall tenderar även $S^2$ att $\neq \sigma_0^2$, $> \sigma_0^2$ resp. $< \sigma_0^2$.)

* De båda tester vi sett i detta kapitel (i tre olika varianter vardera) är <u>parametriska</u> dvs de kräver vi vet att vårt datamaterial har en viss frekvensfunktion (med några okända parametervärden) – i vårt fall $N(\mu, \sigma^2)$.

* Det finns även <u>icke-parametriska</u> tester (som vi nu skall titta på en).

<u>Definition</u> Den teoretiska <u>medianen</u> $M = M_{\underline{X}}$ för en kontinuerlig (stokastisk) variabel $\underline{X}$ ges av

$$P(\underline{X} < M) = P(\underline{X} > M) = 1/2.$$

(Kom ihåg att $P(\underline{X} = M) = 0$ då $\underline{X}$ kontinuerlig enligt 6 i sats 4.3.)

(Eftersom vi definierat en annan median $\tilde{x}$ för datamaterial i kapitel 6 får vi i fortsättningen kalla den stickprovs median.)

# Wilcoxon signed rank test

(Svensk översättning blir (konstiga?) teckenrangtest.)

* $X_1, \dots, X_n$ är stickprov med teoretisk median $M$

(Nu behöver inte alls $X_1, \dots, X_n$ vara $N(\mu, \sigma^2)$ längre.)

* Vi önskar testa $\boxed{H_0 : M = M_0}$ mot en av $\begin{cases} H_1 : M \neq M_0 \\ H_1 : M > M_0 \\ H_1 : M < M_0 \end{cases}$

1) Bilda talen $X_i - M_0$ för $i = 1, \dots, n$

2) Ordna $|X_i - M_0|$, $i = 1, \dots, n$ i växande ordning

$$|X_{j_1} - M_0| < |X_{j_2} - M_0| \leq \dots < |X_{j_n} - M_0|$$

3) Tecken-ranken $R_i = i \operatorname{sign}(X_{j_i} - M_0)$ är $X_{j_i} - M_0$'s ordningsnummer med tecken

4) $\begin{cases} W_+ = \sum_{\text{positiva } R_i} R_i = \sum_{i=1}^{n} \max(R_i, 0) \\ W_- = \sum_{\text{negativa } R_i} R_i = \sum_{i=1}^{n} \min(R_i, 0) \end{cases}$ så $W_+ + |W_-| = \frac{n(n+1)}{2}$

3') Om pga avrundning $|X_{j_i} - M_0| = |X_{j_{i+1}} - M_0|$ sätt $|R_i| = |R_{i+1}| = \frac{i + i + 1}{2}$ och ge sedan $R_i$ o $R_{i+1}$ tecken som $X_{j_i} - M_0$ o $X_{j_{i+1}} - M_0$.

(Klart att om $M = M_0$ bör $W_+ \approx |W_-|$ och större avvikelser från detta indikerar $M \neq M_0$.)

**Sats**

Förkasta $H_0$ om $\begin{cases} \min(W_+, |W_-|) & \text{liten} \\ |W_-| & \text{liten} \\ W_+ & \text{liten} \end{cases}$

(Om $H_0$ ej förkastas enligt satsen så godtages $H_0$.)

* Vad "liten" är framgår av tabell VIII (i boken).

* Tänk på att den övre testen (med $H_1: M \neq M_0$) är tvåsidig medan de båda undre (med $H_1: M > M_0$ eller $H_1: M < M_0$) är ensidiga.

(Tabell VIII räcker bara till $n = 50$ varefter man istället använder en normalapproximation:)

**Sats** Då $H_0$ är sann är

$$W_+ \text{ och } |W_-| \approx N\left(\frac{n(n+1)}{4}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}\right)$$

(Wilcoxon signed rank test med normalapproximation:)

**Sats**

Förkasta $H_0$ om $\dfrac{W_+ - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \notin \begin{cases} [-\lambda_{\alpha/2}, \lambda_{\alpha/2}] \\ (-\infty, \lambda_\alpha] \\ [-\lambda_\alpha, \infty) \end{cases}$

(Om $H_0$ ej förkastas enligt satsen så godtages $H_0$.)

Exempel (Example 8.7.2 i M&A) Jag önskar testa om medianen $M$ är $< M_0 = 120$ för data

| $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | $X_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 115.1 | 117.8 | 116.5 | 121.0 | 120.3 | 119.0 | 119.8 | 118.5 |

$$|X_{j_1}-M_0| \; |X_{j_2}-M_0| \; |X_{j_3}-M_0| \; |X_{j_4}-M_0| \; |X_{j_5}-M_0| \; |X_{j_6}-M_0| \; |X_{j_7}-M_0| \; |X_{j_8}-M_0|$$

$$|X_7-M_0| \; |X_5-M_0| \; |X_4-M_0| = |X_6-M_0| \; |X_8-M_0| \; |X_2-M_0| \; |X_3-M_0| \; |X_1-M_0|$$

$$|-0.2| \; |0.3| \; |1.0| = |-1.0| \; |-1.5| \; |-2.2| \; |-3.5| \; |-4.9|$$

| $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_6$ | $R_7$ | $R_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 2 | 3.5 | -3.5 | -5 | -6 | -7 | -8 |

* Test av $H_0: M = M_0 = 120$ mot $H_1: M < M_0 = 120$

Alt 1) Testen: är $W_+ = 5.5$ liten nog?

→ Enligt tabell VIII kan vi förkasta $H_0$ med $\alpha$-felet 0.05 ty $5.5 < 6$. Tabell VIII med $n=8$.

Alt 2) Alternativt är $W_+ \approx N\left(\frac{n(n+1)}{4}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}\right) = N(18, 51)$ då $H_0$ sann så normalapproximationtestet blir

→ förkasta $H_0$ om $\frac{W_+ - 18}{\sqrt{51}} = -1.75\ldots \notin [-\lambda_\alpha, \infty)$

vilket är uppfyllt för $\alpha = 0.05$ ty $\lambda_\alpha = 1.645$ enligt tabell V.

# Kapitel 9: "Inferences on Proportions"

(I hela detta kapitel är)

$X_1, \dots, X_m$ observationer av $X = \text{binomial}(1, p_x) = \begin{cases} 1 & \text{med slh } p_x \\ 0 & \text{med slh } 1-p_x \end{cases}$

* Vi skattar $\hat{p}_x = \bar{X}$ enligt slutet kapitel 7 samt

**Sats** $\dfrac{\hat{p}_x - p_x}{\sqrt{p_x(1-p_x)/m}} \approx \dfrac{\hat{p}_x - p_x}{\sqrt{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)/m}} \approx N(0,1)$

**Sats** $p_x \in \hat{p}_x \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)/m}$ med $\overset{\text{approximativ}}{\text{konfidensgrad}}$ $1-\alpha$

Bredden av konfidensintervallet är

$$b = 2\lambda_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)/m} \Rightarrow m = \frac{4\lambda_{\alpha/2}^2\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)}{b^2} \leq \frac{\lambda_{\alpha/2}^2}{b^2} \approx \frac{4}{b^2}$$

(är vad som krävs för önskad intervallbredd $b$).

* Vi önskar testa $\boxed{H_0: p_x = p_1}$ mot en av $\boxed{\begin{matrix} H_1: p_x \neq p_1 \\ H_1: p_x > p_1 \\ H_1: p_x < p_1 \end{matrix}}$

**Sats**
Förkasta $H_0$ om $\dfrac{\hat{p}_x - p_1}{\sqrt{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)/m}} \notin \begin{cases} [-\lambda_{\alpha/2}, \lambda_{\alpha/2}] \\ (-\infty, \lambda_\alpha] \\ [-\lambda_\alpha, \infty) \end{cases}$ har $\overset{\text{approximativt}}{\alpha\text{-fel}}$ $\alpha$

(Om $H_0$ ej förkastas enligt satsen så godtages $H_0$.)

(**Bevis** Är helt analogt med de för tidigare parametriska tester vi gått igenom. □)

(Antag nu vi har ett binomial$(1,p_y)$ stickprov till)

$Y_1,\dots,Y_n$ är observationer av $Y = \text{binomial}(1,p_y) = \begin{cases} 1 & \text{med slh } p_y \\ 0 & \text{med slh } 1-p_y \end{cases}$

* Vi skattar $\boxed{\widehat{p_x - p_y} = \hat{p}_x - \hat{p}_y = \bar{X} - \bar{Y}}$

**Sats** $\bar{X} - \bar{Y} \approx N(p_x - p_y,\ p_x(1-p_x)/m + p_y(1-p_y)/n)$

(**Bevis** Överkurs. Följer av att $\bar{X}$ och $\bar{Y}$ är normala och då är skillnaden mellan dem det (då oberoende) enligt ett MGF-argument som i kapitel 7. □)

**Sats**

$p_x - p_y \in \hat{p}_x - \hat{p}_y \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)/m + \hat{p}_y(1-\hat{p}_y)/n}$ med $\underbrace{\text{konfidensgrad}}_{\text{approximativ}}$ $1-\alpha$

* Vi önskar testa $\boxed{H_0: p_x - p_y = p_1 - p_2}$ mot en av $\boxed{\begin{array}{l} H_1: p_x - p_y \neq p_1 - p_2 \\ H_1: p_x - p_y > p_1 - p_2 \\ H_1: p_x - p_y < p_1 - p_2 \end{array}}$

**Sats**

Förkasta $H_0$ om $\dfrac{\hat{p}_x - \hat{p}_y - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)/m + \hat{p}_y(1-\hat{p}_y)/n}} \notin \begin{cases} [-\lambda_{\alpha/2}, \lambda_{\alpha/2}] \\ (-\infty, \lambda_\alpha] \\ [-\lambda_\alpha, \infty) \end{cases}$ har $\alpha$-fel $\alpha$

(Om $H_0$ ej förkastas enligt satsen så godtages $H_0$.)

I specialfallet då $p_1 - p_2 = 0$ ovan (dvs $H_0: p_x = p_y$) kan man (med fördel) ersätta $\hat{p}_x(1-\hat{p}_x)/m + \hat{p}_y(1-\hat{p}_y)/n$ med

$\hat{p}(1/m + 1/n)$ där $\hat{p} = \dfrac{m\hat{p}_x + n\hat{p}_y}{m+n}$