

MVE090 LP4 2020 Föreläsning 3-4

Författare: examinator Patrik Albin (=jag)

Inledning

I kapitel 2 infördes den grundläggande “infrastrukturen” på vilken man utför sannolikhetsberäkningar. (Vi läser en mattekurs och då måste alla begrepp definieras.)

Det denna infrastruktur för sannolikhetsteori användes till är till mycket stor del att räkna på stokastiska variabler (se definition 3.1 nedan) vilket jag nu skall börja lära ut. (Ett delområde av sannolikhetsteorin som dock kan hävdas hamna utanför räkning med stokastiska variabler är den i kapitel 1 avhandlade kombinatoriken.)

I kapitel 3 och kapitel 4 (i föreläsning 5-6) räknar vi mest på en stokastisk variabel i taget. I kapitel 5 (föreläsning 7-8) räknar vi på flera stokastiska variabler på en gång vilket medför en ny svårighet: de kan bero på (påverka) varandra. Så man måste i allmänhet göra en multivariat räkning på alla inblandade stokastiska variablerna på en gång istället för “bara” räkna på en variabel i taget och sedan “lägga ihop”.

Numreringen av mina kapitel är samma som i M&A, så det är inte föreläsningsnumret (även om de är samma i föreläsning 1-2 och till en början här i föreläsning 3-4).

Kapitel 3. “Discrete Distributions”

Detta kapitel handlar om diskreta stokastiska variabler, se definition 3.2 nedan.

Definition 3.1. En stokastisk variabel X är en funktion $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ från ett utfallsrum S till de reella talen $\mathbb{R}$.

Till varje utfall $\omega \in S$ ordnar alltså den stokastiska variabeln X ett reellt tal $X(\omega)$.

Exempel 2.1. (FORTS.) För kast med två tärningar

$$S = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

är summan av vad tärningarna visar ett exempel på en stokastisk variabel, dvs.

$$X : S \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ges av} \quad X((i, j)) = i + j.$$

Definition 3.2. En stokastisk variabel X är diskret om den har antingen ändligt många eller uppräkneligt oändligt många (olika) möjliga värden.

Exempel på ändliga mängder (av möjliga värden) är $\{1, 2, \dots, n\}$ etc. Exempel på uppräkneligt oändliga mängder är de naturliga talen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, de hela talen $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ och de rationella talen $\mathbb{Q}$.

Om utfallsrummet S är diskret måste varje stokastisk variabel $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ definieras på S vara diskret: antalet möjliga värden för $X(\omega)$ kan inte vara fler än antalet $\omega \in S$.

Definition 3.3. För en diskret stokastisk variabel X definieras frekvensfunktionen eller täthetsfunktionen $f(x) = f_X(x)$ [två olika benämningar för samma funktion som på engelska kallas "(probability) density function"] genom

$$f(x) = f_X(x) = \mathbf{P}(X = x) \quad \text{för möjliga värden } x \text{ för } X.$$

Det är en smaksak och kan bero på sammanhang om man väljer enklare beteckningen $f(x)$ eller utförligare $f_X(x)$ som betonar det handlar om frekvensfunktionen för just X .

Kom ihåg att sannolikhetsmått tilldelar sannolikheter till händelser $A \subseteq S$ och $\mathbf{P}(X = x)$ är ett förkortat (men allmänt använt) skrivsätt för $\mathbf{P}(\{\omega \in S : X(\omega) = x\})$ där $\{\omega \in S : X(\omega) = x\}$ är händelsen att utfallet $\omega \in S$ av slumpförsöket är sådant att $X(\omega) = x$ (vilket förstås eventuellt kan inträffa för fler än ett utfall ω).

Exempel 2.1. (FORTS.) För X summan av två balanserade tärningar är

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/36 & \text{för } x = 2 \text{ och } x = 12 \\ 2/36 & \text{för } x = 3 \text{ och } x = 11 \\ 3/36 & \text{för } x = 4 \text{ och } x = 10 \\ 4/36 & \text{för } x = 5 \text{ och } x = 9 \\ 5/36 & \text{för } x = 6 \text{ och } x = 8 \\ 6/36 & \text{för } x = 7 \end{cases}.$$

Här använder vi klassiska sannolikhetsformeln enligt (1) i kapitel 2. Tex. innehåller händelsen $A = \{X = 4\} =$ "summan av tärningarna = 4" de tre utfallen $(1, 3)$, $(2, 2)$ och $(3, 1)$ med sannolikhet $1/36$ vardera så att $\mathbf{P}(X = 4) = 3/36$.

Definition 3.4. För en stokastisk variabel X definieras fördelningsfunktionen $F(x) = F_X(x)$ (engelska "cumulative distribution function") genom

$$F(x) = F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(\{\omega \in S : X(\omega) \leq x\}).$$

Fördelningsfunktionen användes normalt mycket lite för diskreta stokastiska variabler, men däremot mera för kontinuerliga stokastiska variabler i kapitel 4.

Exempel 2.1. (FORTS.) För X summan av två balanserade tärningar är

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för } x < 2 \\ 1/36 & \text{för } 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & \text{för } 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & \text{för } 4 \leq x < 5 \\ 10/36 & \text{för } 5 \leq x < 6 \\ 15/36 & \text{för } 6 \leq x < 7 \\ 21/36 & \text{för } 7 \leq x < 8 \\ 26/36 & \text{för } 8 \leq x < 9 \\ 30/36 & \text{för } 9 \leq x < 10 \\ 33/36 & \text{för } 10 \leq x < 11 \\ 35/36 & \text{för } 11 \leq x < 12 \\ 1 & \text{för } 12 \leq x \end{cases}.$$

Här använder vi vad vi vet om $f_X(x)$ från ovan. Tex. är

$$\begin{aligned} F_X(3.5) &= \mathbf{P}(X \leq 3.5) = \mathbf{P}(X \leq 3) \\ &= \mathbf{P}(\{X = 2\} \cup \{X = 3\}) \\ &= \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) = f_X(2) + f_X(3) = 3/36 \end{aligned}$$

eftersom händelserna $\{X = 2\} = \{(1, 1)\}$ och $\{X = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ej överlappar $\{X = 2\} \cap \{X = 3\} = \emptyset$ (kom ihåg axiom 3 i definition 2.1).

Sats 3.5. För en diskret stokastisk variabel X med frekvensfunktion $f_X(x)$ är

1. $f_X(x) \geq 0$ för alla x ,
2. $\sum_{\text{alla } x} f_X(x) = 1$,
3. $\mathbf{P}(X \in C) = \sum_{\text{alla } x \in C} f_X(x)$ för $C \subseteq \mathbb{R}$.

Bevis. 1. Följer av att $f_X(x)$ är en sannolikhet.

2. Följer av att ta $C = \mathbb{R}$ i 3.

3. Analogt med hur jag visade $F_X(3.5) = 3/36$ för X summan av två tärningar ovan är

$$\mathbf{P}(X \in C) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{x \in C} \{X = x\}\right) = \sum_{x \in C} \mathbf{P}(X = x).$$

Här följer andra likheten av 3 i Sats 2.2 eftersom $\{X = y\} \cap \{X = z\} = \emptyset$ för $y \neq z$: den stokastiska variabeln X kan inte vara lika med både y och z på en gång, dvs. det finns inga utfall $\omega \in S$ som tillhör båda händelserna $\{X = y\} = \{\omega \in S : X(\omega) = y\}$ och $\{X = z\} = \{\omega \in S : X(\omega) = z\}$ då $y \neq z$. $\square$

Definition 3.6. Väntevärdet $\mathbf{E}(X)$ av en diskret stokastisk variabel X definieras

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\text{alla } x} x f_X(x).$$

Väntevärde (engelska “expectation”) kallas ibland lite slarvigt medelvärde men det är bäst undvika detta ty det finns även något annat som kallas medelvärde i kapitel 6.

Väntevärdet $\mathbf{E}(X)$ är helt enkelt tyngdpunkten (punkten med momentjämvikt) för den diskreta grafen av frekvensfunktionen $f_X(x)$.

Väntevärdet $\mathbf{E}(X)$ betecknas också ofta μ eller (tydligare) μ_X främst för att betona att det är en konstant (ett vanligt reellt tal) och inte något mera komplicerat.

Exempel 2.1. (FORTS.) För X summan av två balanserade tärningar är det klart [studera uttrycket för $f_X(x)$ ovan] att tyngdpunkten för $f_X(x)$ är $\mathbf{E}(X) = 7$. Det kan jag också räkna ut (utan att behöva “inse” något) mha definition 3.6:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} \\ &= \dots = \frac{252}{36} = 7. \end{aligned}$$

Om $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion och $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ en stokastisk variabel är även $h(X) = h(X(\omega))$ en stokastisk variabel (ty funktion av utfallet $\omega \in S$ av ett slumpexperiment).

Sats 3.7. Väntevärdet av funktionen $h(X)$ av en diskret stokastisk variabel X är

$$\mathbf{E}(h(X)) = \sum_{\text{alla } k} h(k) f_X(k).$$

Bevis. Överkurs. $\mathbf{E}(h(X)) = \sum_{\text{alla } h(x)} h(x) \mathbf{P}(h(X) = h(x)) = \sum_{\text{alla } x} h(x) \mathbf{P}(X = x).$ $\square$

Exempel 2.1. (FORTS.) För X summan av två balanserade tärningar och

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \text{ är jämn} \\ 1 & \text{om } x \in \{3, 5, 7, 9, 11\} \text{ är udda} \end{cases}$$

är $\mathbf{E}(h(X)) = 1/2$ ty sannolikheten att X är jämn är $f_X(2) + f_X(4) + f_X(6) + f_X(8) + f_X(10) + f_X(12) = \dots = 1/2$ så att sannolikheten att X är udda också är $1/2$. Det kan jag också räkna ut (utan behöva inse något) mha. sats 3.7:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(h(X)) &= 0 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{2}{36} + 0 \cdot \frac{3}{36} + 1 \cdot \frac{4}{36} + 0 \cdot \frac{5}{36} + 1 \cdot \frac{6}{36} + 0 \cdot \frac{5}{36} + 1 \cdot \frac{4}{36} + 0 \cdot \frac{3}{36} + 1 \cdot \frac{2}{36} + 0 \cdot \frac{1}{36} = \frac{18}{36}. \end{aligned}$$

Sats 3.8. För två diskreta stokastiska variabler X och Y är

1. $\mathbf{E}(X) = c$ om X är en konstant stokastisk variabel $X = c$ för ett $c \in \mathbb{R}$,
2. $\mathbf{E}(cX) = c\mathbf{E}(X)$ för en konstant $c \in \mathbb{R}$,
3. $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$.

Bevis. 1. Enligt definition 3.6 är

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\text{alla } x} x f_X(x) = c f_X(c) = c \cdot 1 = c.$$

2. Genom ta $h(x) = cx$ i sats 3.7 och därefter använda definition 3.6 ser jag att

$$\mathbf{E}(cX) = \sum_{\text{alla } x} h(x) f_X(x) = \sum_{\text{alla } x} cx f_X(x) = c\mathbf{E}(X).$$

3. Detta kan jag ej bevisa förrän jag kommit en bit in i kapitel 5 i M&A. □

Definition 3.9. Variansen $\mathbf{Var}(X)$ av en stokastisk variabel X definieras

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}([X - \mathbf{E}(X)]^2) = \mathbf{E}((X - \mu_X)^2)$$

Standardavvikelsen av X definieras som $\sqrt{\mathbf{Var}(X)}$.

Variansen $\mathbf{Var}(X)$ betecknas ofta σ^2 eller σ_X^2 och standardavvikelsen σ eller σ_X .

Variansen $\mathbf{Var}(X)$ är ett (kvadratisk) mått på hur utspridd frekvensfunktionen är kring sin tyngpunkt $\mathbf{E}(X)$ – stor varians betyder en bred graf och liten varians en smal graf [förhållandevis koncentrerad kring $\mathbf{E}(X)$]. Standardavvikelsen σ_X betyder samma sak men i verklig (ej kvadrerad) skala. I beräkningar och bevis etc. användes vanligen variansen eftersom det blir enklare (utan rottecknet). Så tar man kanske roten efteråt.

Sats 3.10. För två diskreta stokastiska variabler X och Y är

1. $\mathbf{Var}(X) = \sum_{\text{alla } x} (x - \mu_X)^2 f_X(x)$,
2. $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \mathbf{E}(X^2) - \mu_X^2$,
3. $\mathbf{Var}(X) = 0$ om och endast om X är en konstant variabel $X = c$ för ett $c \in \mathbb{R}$,
4. $\mathbf{Var}(cX) = c^2 \mathbf{Var}(X)$ för en konstant $c \in \mathbb{R}$,
5. $\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y)$ om X och Y är oberoende.

Att X och Y är oberoende betyder att $\mathbf{P}(\{X \in C\} \cap \{Y \in D\}) = \mathbf{P}(X \in C) \mathbf{P}(Y \in D)$ för $C, D \subseteq \mathbb{R}$. Detta lär jag ut i kapitel 5 i M&A så funderar inte mer på det nu.

Föresten skriver jag ibland $\mathbf{P}(A, B)$ istf. $\mathbf{P}(A \cap B)$ i fortsättningen, de är synonyma.

Bevis. 1. Följer direkt av använda sats 3.7 med $h(x) = (x - \mu_X)^2$.

2. Genom använda alla tre delarna av sats 3.8 följer att

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(X) &= \mathbf{E}((X - \mu_X)^2) = \mathbf{E}(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2) \\ &= \mathbf{E}(X^2) - 2\mu_X \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(\mu_X^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mu_X^2.\end{aligned}$$

3. Om $X = c$ är enligt 1 i sats 3.8 $\mathbf{E}(X) = c$ så att $(X - \mu_X)^2 = 0$ som (enligt 1 i sats 3.8) har väntevärde $\mathbf{E}(0) = 0$. Omvänt visar 1 att $f_X(\mu_X) = 1$ om $\mathbf{Var}(X) = 0$.

4. Enligt 2 i sats 3.8 är $(cX - \mu_{cX})^2 = (cX - c\mu_X)^2 = c^2(X - \mu_X)^2$ som (enligt 2 i sats 3.8) har väntevärde $c^2 \mathbf{E}((X - \mu_X)^2) = c^2 \mathbf{Var}(X)$.

5. Detta kan jag ej bevisa förrän jag kommit en bit in i kapitel 5 i M&A. □

Exempel 2.1. (FORTS.) För X summan av två balanserade tärningar är $\mathbf{E}(X^2)$

$$2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + 4^2 \cdot \frac{3}{36} + 5^2 \cdot \frac{4}{36} + 6^2 \cdot \frac{5}{36} + 7^2 \cdot \frac{6}{36} + 8^2 \cdot \frac{5}{36} + 9^2 \cdot \frac{4}{36} + 10^2 \cdot \frac{3}{36} + 11^2 \cdot \frac{2}{36} + 12^2 \cdot \frac{1}{36}$$

som blir $\dots = 329/6$ så att enligt sats

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{329}{6} - 7^2 = \dots = \frac{35}{6}.$$

Notera att frekvensfunktionen når 5 enheter ut från tyngdpunkten 7 till minsta och största möjliga värdena 2 respektive 12 för X och $\sigma_X = \sqrt{35/6} = 2.41523\dots$ är cirka vad jag skulle gissa medelmomentavståndet för X värde från 7 bör vara.

Definition 3.11. Den momentgenererande funktionen (MGF) $m_X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ för en stokastisk variabel X definieras

$$m_X(t) = \mathbf{E}(e^{tX}).$$

Sats 3.12. För en stokastisk variabel X gäller att

$$m_X^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} m_X(t) \Big|_{t=0} = \mathbf{E}(X^k) \quad \text{för } k \in \mathbb{N}.$$

Bevis. $m_X^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{E}(e^{tX}) \Big|_{t=0} = \mathbf{E}\left(\frac{d^k}{dt^k} e^{tX}\right) \Big|_{t=0} = \mathbf{E}(X^k e^{tX}) \Big|_{t=0} = \mathbf{E}(X^k).$ □

Talet $\mathbf{E}(X^k)$ kallas moment av ordning k för den stokastiska variabeln X och $k \in \mathbb{N}$. Moment är en viktig beskrivande egenskap för stokastiska variabler, bla. i statistik. Och vet man alla moment kan man bestämma frekvensfunktionen $f_X(x)$ från dem.

Definition 3.13. En stokastisk variabel X med möjliga värden $1, 2, 3, \dots$ och frekvensfunktion $f_X(k) = (1 - p)^{k-1}p$ för $k = 1, 2, 3, \dots$ är geometriskt fördelad.

Ovan är $p \in (0, 1)$ en sk. parameter, dvs. ett fixt (men godtyckligt valt) tal i $(0, 1)$.

Att $\sum_{k=1}^{\infty} f_X(k) = 1$ för $f_X(k)$ ovan följer lätt av formeln för geometrisk summa.

Geometrisk fördelning kallas även väntetidsfördelning enär om man utför ett slumpmässigt experiment som har sannolikhet p att lyckas upprepat tills det lyckas för första gången och X är antalet försök som behövs för det så är X geometriskt fördelad. Ty $X = k$ betyder att först misslyckas $k - 1$ försök varefter experiment nummer k lyckas.

Notera: jag använder hellre i, j, k, l, m, n etc. för beteckna heltal istf. x som M&A.

Exempel 3.1. En geometrisk fördelad stokastisk variabel X har enligt sats 3.7 och formeln för geometrisk summa momentgenererande funktion

$$\mathbf{E}(e^{tX}) = \sum_{\text{alla } x} e^{tx} f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} (1-p)^{k-1} p = e^t p \sum_{k=1}^{\infty} [e^t (1-p)]^{k-1} = \frac{e^t p}{1 - e^t (1-p)}.$$

Mha. Mathematica beräknar jag därför lätt $m'_X(0) = \mathbf{E}(X)$

```
In[1]:= Simplify[D[Exp[t]*p/(1-Exp[t]*(1-p)),t]/.{t->0}]
```

```
Out[1]= 1/p
```

och $m''_X(0) = \mathbf{E}(X^2)$

```
In[2]:= Simplify[D[D[Exp[t]*p/(1-Exp[t]*(1-p)),t],t]/.{t->0}]
```

```
Out[2]= (2-p)/p^2
```

så att enligt 2 i sats 3.10

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Här använde jag standardkonventionen $q = 1 - p$ för tal (sannolikheter) $p \in (0, 1)$.

Definition 3.14. En stokastisk variabel X med möjliga värden $0, 1, \dots, n$ och frekvensfunktion $f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ för $k = 0, 1, \dots, n$ är binomialfördelad.

Ovan är heltalet $n \geq 1$ och $p \in (0, 1)$ parametrar och man skriver att X är $\text{Bin}(n, p)$.

Att $\sum_{k=1}^{\infty} f_X(k) = 1$ för $f_X(k)$ ovan följer av det sk. binomialteoremet:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{för } a, b \geq 0.$$

Om man utför ett slumpmässigt experiment n gånger som har sannolikhet p att lyckas varje gång och X är antalet lyckade försök bland de n utförda så är X binomialfördelad. Ty varje specifik sekvens av sammanlagt k lyckade och $n - k$ misslyckade försök har sannolikhet $p^k (1-p)^{n-k}$ och enligt sats 1.4 finns $\binom{n}{k}$ olika sådana sekvenser.

Överkurs. Inse summan av n (oberoende) $\text{Bin}(1, p)$ stokastiska variabler är $\text{Bin}(n, p)$.

Exempel 3.2. En binomialfördelad stokastisk variabel X har enligt sats 3.7 och binomialteoremet momentgenererande funktion

$$\mathbf{E}(e^{tX}) = \sum_{\text{alla } x} e^{tx} f_X(x) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (e^t p + (1-p))^n.$$

Mha. Mathematica beräknar jag därför lätt $m'_X(0) = \mathbf{E}(X)$

```
In[3]:= Simplify[D[(Exp[t]*p+(1-p))^n,t]/.{t->0}]
```

```
Out[3]= n p
```

och $m''_X(0) = \mathbf{E}(X^2)$

```
In[4]:= Simplify[D[D[(Exp[t]*p+(1-p))^n,t],t]/.{t->0}]
```

```
Out[4]= n p (1 + (n - 1) p)
```

så att enligt 2 i sats 3.10

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = n p (1 + (n-1)p) - (np)^2 = n p (1-p).$$

Definition 3.15. En stokastisk variabel X med möjliga värden $r, r+1, r+2, \dots$ och frekvensfunktion

$$f_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(k-1)-(r-1)} p = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

för $k = r, r+1, r+2, \dots$ är negativt binomialfördelad.

Ovan är heltalet $r \geq 1$ och $p \in (0, 1)$ parametrar.

Om man utför ett slumpmässigt experiment som har sannolikhet p att lyckas varje gång till experimentet lyckats r gånger och X är antalet försök som behövs för det är X negativt binomialfördelad. Ty $X = k$ betyder att först är en $\text{Bin}(k-1, p)$ stokastisk variabel lika $r-1$ (dvs. $r-1$ av de $k-1$ första försöken lyckas) med sannolikhet $\binom{k-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(k-1)-(r-1)}$ och sedan lyckas experiment nummer k med sannolikhet p .

Exempel 3.3. Överkurs. En negativt binomialfördelad stokastisk variabel X har

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{k=r}^{\infty} e^{tk} \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\ &= \frac{(p e^t)^r}{(1-e^t(1-p))^r} \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} (1-e^t(1-p))^r [1-(1-e^t(1-p))]^{k-r} = \frac{(p e^t)^r}{(1-e^t(1-p))^r} \end{aligned}$$

(varför?). Genom inse summan av r (oberoende) väntetidsfördelade stokastiska variabler med parameter p är negativt binomialfördelad kan vi beräkna $\mathbf{E}(X) = r/p$ och $\mathbf{Var}(X) = r p / p^2$ mha. exempel 3.1 samt 3 i sats 3.8 och 5 i sats 3.10.

Definition 3.16. En stokastisk variabel X med möjliga värden $\mathbb{N} = 0, 1, 2, \dots$ och frekvensfunktion $f_X(k) = (\lambda^k/(k!)) e^{-\lambda}$ för $k \in \mathbb{N}$ är Poisson fördelad.

Ovan är $\lambda > 0$ en parameter och man skriver att X är $\text{Po}(\lambda)$.

Poisson är en död (före detta) fransk gubbe.

Att $\sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) = 1$ för $f_X(k)$ ovan följer av Taylor utveckling $e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k/(k!)$.

Taylor är en död (före detta) engelsk gubbe.

Poisson fördelningen förekommer i naturen: det slumpmässiga antal sönderfall ett stycke radioaktivt material har per tidsenhet har denna fördelning (kan man bevisa mha. fysikens axiom). MVE090-kursens första projekt anknyter till detta.

Exempel 3.4. För en Poisson fördelad stokastisk variabel X är

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} (\lambda^k/(k!)) e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (e^t \lambda)^k/(k!) = e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} = e^{(e^t - 1)\lambda}$$

(mha. Taylor utvecklingen ovan), så att $m'_X(0) = \mathbf{E}(X)$ är

```
In[5] := Simplify[D[Exp[(Exp[t]-1)*lambda],t]/.{t->0}]
```

```
Out[5]= lambda
```

och $m''_X(0) = \mathbf{E}(X^2)$ är

```
In[6] := Simplify[D[D[Exp[(Exp[t]-1)*lambda],t],t]/.{t->0}]
```

```
Out[6]= lambda (1 + lambda)
```

vilket ger

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \lambda(1 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

Definition 3.17. En stokastisk variabel X är hypergeometriskt fördelad om den har möjliga värden $\{\max[0, n - (N - r)], \dots, \min[n, r]\}$ och frekvensfunktion

$$f_X(k) = \binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k} / \binom{N}{n} \quad \text{för } k \in \{\max[0, n - (N - r)], \dots, \min[n, r]\}.$$

Ovan är heltalen $N \geq 2$ och $r, n \in \{1, \dots, N\}$ parametrar.

Om man slumpmässigt väljer ut n objekt från en population om N objekt varav r objekt är OK och $N - r$ objekt är ej OK och om X är antalet OK objekt man erhåller så är X enligt sats 1.4 och klassiska sannolikhetsformeln hypergeometriskt fördelad.

Det är intuitivt klart (och även sant :)) att $\mathbf{E}(X) = n(r/N)$. Jag avstår beräkna $\mathbf{Var}(X)$ men det finns en formel för den i boken.

Simulering av diskret stokastisk variabel. En observation av en stokastisk variabel X är värdet X får då man utför det slumpmässiga experimentet en gång och använder utfallet $\omega \in S$ till räkna ut den stokastiska variabelns värde $X(\omega)$ enligt definition 3.1.

Hur gör man en observation av en diskret stokastisk variabel X med möjliga värden $x_1, x_2, x_3 \dots$ med respektive sannolikheter $f_X(x_1), f_X(x_2), f_X(x_3), \dots$ i dator? Svar:

Sats 3.18. (TABELLMETODEN) Tag ett slumpstal ξ mellan 0 och 1 och sätt

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{om} & 0 \leq \xi < f(x_1) \\ x_2 & \text{om} & f(x_1) \leq \xi < f(x_1) + f(x_2) \\ x_3 & \text{om} & f(x_1) + f(x_2) \leq \xi < f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \\ \vdots & & \vdots \end{cases}.$$

Bevis. Överkurs. Sannolikheten att $\sum_{i=1}^{k-1} f_X(x_i) \leq \xi < \sum_{i=1}^k f_X(x_i)$ är $f_X(x_k)$. $\square$

Ovan är ξ egentligen en sk. kontinuerlig stokastisk variabel som är likformigt fördelad över intervallet $[0, 1]$: detta lär jag ut i nästa kapitel 4.