MVE090 LP4 2020 Föreläsning 5-6

Författare: examinator Patrik Albin (=jag)

Kapitel 4. "Continuous Distributions"

Kanske även föreläsning 7-8 blir pdf, men åtminstone föreläsning 9-14 planeras filmade. Vilket jag uppskattar kommer bespara minst 75% av arbetet jämfört göra pdf :).

Detta det längsta av alla kapitel handlar om kontinuerliga stokastiska variabler:

Definition 4.1. En stokastisk variabel X är kontinuerlig om den har mer än uppräkneligt oändligt många (olika) möjliga värden.

Definition 4.2. Frekvensfuntionen $f(x) = f_X(x)$ för en kontinuerlig stokastisk variabel X definieras $f_X(x) = F'_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$ [där $F_X(x)$ är fördelningsfunktionen enligt definition 3.4].

Sats 4.3. För en kontinuerlig stokastisk variabel X med frekvensfunktion $f_X(x)$ är

1. $f_X(x) \geq 0$ för $x \in \mathbb{R}$,
2. $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$ för $x \in \mathbb{R}$,
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\,dy = 1$,
4. $\mathbf{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int\limits_{a}^{b} f_X(y)\,dy$ för $-\infty \leq a < b \leq \infty$,
5. $\mathbf{P}(X \in C) = \int\limits_{x \in C} f_X(y)\,dy$ för $C \subseteq \mathbb{R}$,
6. $\mathbf{P}(X = x) = 0$ för $x \in \mathbb{R}$.

Pga. 6 spelar det ingen roll om vi skriver $<$ eller $\leq$ i $\mathbf{P}(a < X \leq b)$ i 4.

Bevis. 1. Följer av att $f_X(x)$ är derivatan av en växande funktion: $F_X(y) = \mathbf{P}(X \leq y) \leq \mathbf{P}(X \leq z) = F_X(z)$ för $y \leq z$.

2. Följer av ta $a = -\infty$ och $b = x$ i 4 eftersom $F_X(-\infty) = \mathbf{P}(X \leq -\infty) = 0$.

3. Följer av ta $a = -\infty$ och $b = \infty$ i 4 eftersom $\mathbf{P}(-\infty < X \leq \infty) = 1$.

4. Eftersom $\{X \leq b\} \cap \{X \leq a\} = \{X \leq a\}$ för $a \leq b$ ger 4 i sats 2.2 att

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) = \mathbf{P}(X \leq b) - \mathbf{P}(\{X \leq b\} \cap \{X \leq a\}) = F_X(b) - F_X(a).$$

Den andra likheten följer direkt av analysens huvudsats och definitionen av $f_X(x)$.

5. Överkurs. Inse att om 5 är sann för icke överlappande $C_1, C_2, C_3 \ldots \subseteq \mathbb{R}$ så är 5 sann för $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots$. Men varje [vettig (sk. Borel-)] mängd $C \subseteq \mathbb{R}$ kan bildas som en union av icke överlappande intervall $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$ för vilka 5 är sann enligt 4.

6. Överkurs. Enligt 3 är

$$0 \le \mathbf{P}(X = x) \le \mathbf{P}(x - \varepsilon < X \le x) = \int_{x-\varepsilon}^{x} f_X(y)\, dy \downarrow 0 \quad \text{då } \varepsilon \downarrow 0^+$$

eftersom integralen är en deriverbar och därför speciellt kontinuerlig funktion av ε. □

Definition 4.4. Väntevärdet av en kontinuerlig stokastisk variabel X definieras

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx.$$

Precis som för diskreta stokastiska variabler är väntevärdet tyngdpunkten för grafen av $f_X(x)$ och betecknas alternativt μ eller μ_X.

Sats 4.5. För en kontinuerlig stokastisk variabel X och funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är

$$\mathbf{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, f_X(x)\, dx.$$

Bevis. Dubbel överkurs. Approximera X "uppifrån" med en diskret stokastisk variabel

$$X_n(\omega) = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} \frac{k}{2^n}\, \mathbf{1}_{(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(X(\omega)) \quad \text{för } n \in \mathbb{N} \text{ och } \omega \in S$$

som enligt 4 i sats 4.3 har frekvensfunktion

$$f_{X_n}(\tfrac{k}{2^n}) = \mathbf{P}(\tfrac{k-1}{2^n} < X \le \tfrac{k}{2^n}) = \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f_X(x)\, dx$$

så att enligt sats 3.7 (under några ospecificerade tekniska extravillkor)

$$\mathbf{E}(h(X)) \leftarrow \mathbf{E}(h(X_n)) = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} h(\tfrac{k}{2^n}) f_{X_n}(\tfrac{k}{2^n}) = \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} h(\tfrac{k}{2^n}) \Big(\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f_X(x)\, dx \Big) \to \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)\, dx$$

då $n \to \infty$ eftersom sista summan är Riemann summeapproximation av integralen. □

Sats 4.6. För två kontinuerliga stokastiska variabler X och Y är

1. $\mathbf{E}(c\, X) = c\, \mathbf{E}(X)$ för en konstant $c \in \mathbb{R}$,
2. $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$.

Bevis. Följer av att ta $h(x) = c\, x$ i sats 4.5 i analogi med beviset av 2 i sats 3.8.

2. Precis som med 3 i sats 3.8 kan jag ej bevisa detta förrän i kapitel 5. □

Definition 3.9 av varians och standardavvikelse gäller även för kontinuerliga stokastiska variabler. Liksom de två styckena med förklarande text därefter.

Sats 4.7. För två kontinuerliga stokastiska variabler X och Y är

1. $\mathbf{Var}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\, dx$,
2. $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \mathbf{E}(X^2) - \mu_X^2$,
3. $\mathbf{Var}(c\,X) = c^2\,\mathbf{Var}(X)$ för en konstant $c \in \mathbb{R}$,
4. $\mathbf{Var}(X+Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y)$ om X och Y är oberoende.

Bevis. 1. Följer direkt av använda sats 4.5 med $h(x) = (x - \mu_X)^2$.

2-4. Bevisas precis som motsvarande påståenden 2, 4 respektive 5 i sats 3.10. $\square$

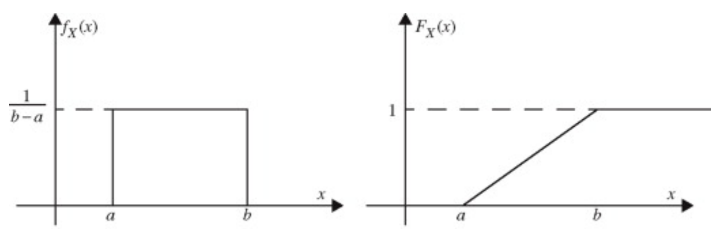
Definition 4.8. En stokastisk variabel X med möjliga värden $[a,b]$ och frekvensfunktion $f_X(x) = 1/(b-a)$ för $x \in [a,b]$ är <u>likformigt fördelad Uni$[a,b]$</u> över $[a,b]$.

Ovan är talen $-\infty < a < b < \infty$ parametrar.

När jag som ovan bara anger värdet för $f_X(x)$ i en viss region av x-värden underförstås att $f_X(x) = 0$ för övrigt. "Uni" kommer från engelskans "uniform".

Exempel 4.1. För en Uni$[a,b]$ stokastisk variabel X är enligt 2 i sats 4.3

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_Y(y)\, dy = \begin{cases} 0 & \text{för} \quad x < a \\ \int\limits_a^x \frac{dy}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} & \text{för} \quad x \in [a,b] \\ 1 & \text{för} \quad x > b \end{cases}.$$



Vidare måste $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ vilket också kan räknas ut:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Nästan samma räkning ger att $\mathbf{E}(X^2) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$ så att slutligen enligt 2 i sats 4.7

$$\mathbf{Var}(X) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \ldots = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

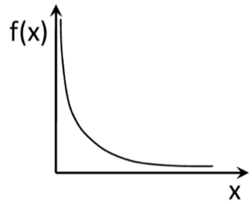
Definition 4.9. En stokastisk variabel X med möjliga värden $[0, \infty)$ och frekvensfunktion $f_X(x) = \frac{1}{\beta}\,\mathrm{e}^{-x/\beta}$ för $x \geq 0$ är exponentialfördelad $\mathrm{Exp}(\beta)$.

Ovan är talet $\beta > 0$ en parameter.

Exempel 4.2. För en $\mathrm{Exp}(\beta)$ stokastisk variabel X är enligt 2 i sats 4.3

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{för} \quad x < 0 \\ \int_0^x \frac{1}{\beta}\,\mathrm{e}^{-y/\beta}\,dy = 1 - \mathrm{e}^{-x/\beta} & \text{för} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Grafen av de flesta kontinuerliga fördelningsfunktioner ser ungefär likadana ut för ögat så det är ofta liten mening visa dem utan man plottar frekvensfunktionen:



Jag räknar enkelt ut den momentgenererande funktionen mha. 1 i sats 4.7

$$m_X(t) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{tx}\,\frac{1}{\beta}\,\mathrm{e}^{-x/\beta}\,dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{x(t-1/\beta)}}{\beta t - 1}\right]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{\beta t - 1}$$

för $t \in [0, 1/\beta)$. Här konvergerar integralen för $m_X(t)$ bara för vissa t-värden men det viktiga är att 0 är med bland dem och så är det ju ovan.

Sats 3.12 om beräkna moment genom derivera $m_X(t)$ är sann även för kontinuerliga stokastiska variabler (med oförändrat bevis) vilket ger $\mathbf{E}(X) = m_X'(0)$

```
In[1]:= Simplify[D[(1/(1-beta*t),t]/.{t->0}]
Out[1]= beta
```

och $\mathbf{E}(X^2) = m_X''(0)$

```
In[2]:= Simplify[D[D[1/(1-beta*t),t],t]/.{t->0}]
Out[2]= 2 beta^2
```

så att enligt 2 i sats 4.7

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \beta^2.$$

Definition 4.10. En stokastisk variabel X med möjliga värden $(-\infty, \infty)$ och frekvensfunktion $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/\sigma^2}$ för $x \in \mathbb{R}$ är normalfördelad $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

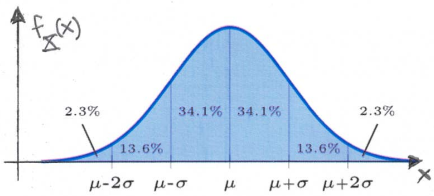
Ovan är talen $\mu \in \mathbb{R}$ och $\sigma > 0$ parametrar.

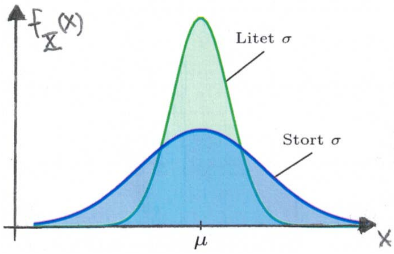
Exempel 4.3. För en $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ stokastisk variabel X är enligt 2 i sats 4.3

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(y-\mu)^2/\sigma^2}\,dy \quad \text{för } x \in \mathbb{R}.$$

Värdet av denna integral kan ej uttryckas mha. elementära funktioner etc. (annat än för x lika $-\infty$, μ eller ∞ då den är 0, 1/2 respektive 1). Jag återkommer till hur $F_X(x)$ beräknas numeriskt mha. tabell V i M&A efter detta exempel.

Frekvensfunktionen för en normalfördelad stokastisk variabel är Gauss klockan:





Mha. kvadratkomplettering i exponenten i andra integralen ser jag att

$$\begin{aligned} m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f_X(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/\sigma^2}\,dx \\ &= \mathrm{e}^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-\sigma^2 t-\mu)^2/\sigma^2}\,dx = \mathrm{e}^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \end{aligned}$$

där den sista integralen är ett eftersom det är arean under en $\mathrm{N}(\sigma^2 t + \mu, \sigma^2)$ frekvensfunktion (dvs. en annan normalfördelning).

Tricket att känna igen integraler (eller summor) som integraler (eller summor) av frekvensfunktioner och att de därför är ett är icke sällan användbart.

Jag kan nu räkna ut $\mathbf{E}(X) = m_X'(0)$

```
In[3]:= Simplify[D[Exp[mu*t+sigma^2*t^2/2],t]/.{t->0}]
Out[3]= mu
```

och $\mathbf{E}(X^2) = m_X''(0)$

```
In[4]:= Simplify[D[D[Exp[mu*t+sigma^2*t^2/2],t],t]/.{t->0}]
Out[4]= mu^2 + sigma^2
```

så att

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \sigma^2.$$

För att lära er räkna normalsannolikheter mha. tabell V i M&A behöver jag följande:

Definition 4.11. En $\mathrm{N}(0,1)$ stokastisk variabel kallas <u>standard normalfördelad</u>.

Sats 4.12. Om X är normal $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ är $(X-\mu)/\sigma$ standard normal $\mathrm{N}(0,1)$.

Bevis. Enligt exempel 4.3 är

$$m_{(X-\mu)/\sigma}(t) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{t(X-\mu)/\sigma}) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{(t/\sigma)X})\,\mathrm{e}^{-\mu t/\sigma} = m_X(t/\sigma)\,\mathrm{e}^{-\mu t/\sigma} = \ldots = \mathrm{e}^{t^2/2}$$

som (enligt exempel 4.3) är momentgenererande funktionen för $\mathrm{N}(0,1)$. □

Exempel 4.4. Om X är $\mathrm{N}(1,0.25)$ kan jag mha. sats 4.12 och tabell V beräkna

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(0.9<X\leq 1.54) &= \mathbf{P}\Big(\frac{0.9-1}{0.5}<\frac{X-1}{0.5}\leq\frac{1.54-1}{0.5}\Big)\\ &= \mathbf{P}\Big(\mathrm{N}(0,1)\leq\frac{1.54-1}{0.5}\Big)-\mathbf{P}\Big(\mathrm{N}(0,1)\leq\frac{0.9-1}{0.5}\Big) = 0.8599-0.4207.\end{aligned}$$

Normalfördelning finns naturligt pga. följande i statistikteori fundamentala resultat som säger att summan av många små oberoende slumpmässiga bidrag är normalt:

Sats 4.13. Om $X_1, X_2, \ldots$ är oberoende stokastiska variabler med gemensamt väntevärde μ och varians σ^2 är $\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)/\sqrt{n\,\sigma^2} \approx \mathrm{N}(0,1)$ då $n\to\infty$.

Bevis. Dubbel överkurs. Summanderna $(X_i-\mu)/\sqrt{n\,\sigma^2}$ har väntevärde 0 och varians $1/n$ så att enligt sats 3.12 deras momentgenererande funktion har Taylor utveckling $m(t) = 1+\frac{1}{2}\,t^2/n + o(t^2/n)$ vilket pga. oberoendet ger

$$\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)/\sqrt{n\,\sigma^2}}\big) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(\mathrm{e}^{(X_i-\mu)/\sqrt{n\,\sigma^2}}) = \big(1+\tfrac{1}{2}\,t^2/n+o(t^2/n)\big)^n \to \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2}. \qquad □$$

De viktigaste slagen av kontinuerliga stokastiska variabler är ovannämnda tre likformig, exponentiell och normal. Jag definierar härnäst även gamma och Weibull stokastiska variabler men väntar diskutera sk. χ^2 variabler till kapitel 8.

Definition 4.14. En stokastisk variabel X med möjliga värden $(0,\infty)$ och frekvensfunktion $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\,x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x/\beta}$ för $x>0$ är gamma fördelad.

Ovan är talen $\alpha,\beta>0$ parametrar och $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$ gamma funktionen. Gamma fördelning med $\alpha=1$ är $\mathrm{Exp}(\beta)$. Gamma är grekisk bokstav ($\neq$död gubbe).

Definition 4.15. En stokastisk variabel X med möjliga värden $(0,\infty)$ och frekvensfunktion $f_X(x) = \alpha\beta\,x^{\beta-1}\,\mathrm{e}^{-\alpha x^\beta}$ för $x>0$ är Weibull fördelad.

Ovan är talen $\alpha,\beta>0$ parametrar. Och $\beta=1$ ger $\mathrm{Exp}(1/\alpha)$ fördelning.

Waloddi Weibull är en död (före detta) ursprungligen skånsk gubbe från Vittskövle.

Exempel 4.5. En gamma stokastisk variabel har momentgenererande funktion

$$
\begin{aligned}
m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f_X(x)\, dx &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-x/\beta}\, dx \\
&= (1-\beta t)^{-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{(1/\beta-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-x/(1/\beta-t)^{-1}}\, dx = (1-\beta t)^{-\alpha}
\end{aligned}
$$

där sista integralen är ett eftersom arean under en gamma frekvensfunktion. Jag kan nu enkelt räkna ut $\mathbf{E}(X) = m_X'(0) = \alpha\beta$ och $\mathbf{E}(X^2) = m_X''(0) = \alpha(\alpha+1)\beta$.

Exempel 4.6. För en Weibull stokastisk variabel X är $\mathbf{E}(X)$

```
In[5]:= FullSimplify[Integrate[x*alpha*beta*x^(beta-1)*
  Exp[-alpha*x^beta],{x,0,Infinity},Assumptions->alpha>0&&beta>0]]
```

`Out[5]=` $alpha^{-1/beta}\, Gamma[1 + \frac{1}{beta}]$

och $\mathbf{E}(X^2)$

```
In[6]:= FullSimplify[Integrate[x^2*alpha*beta*x^(beta-1)*
  Exp[-alpha*x^beta],{x,0,Infinity},Assumptions->alpha>0&&beta>0]]
```

`Out[6]=` $alpha^{-2/beta}\, Gamma[1 + \frac{2+beta}{beta}]$.

I mera avancerad matte är ofta olikheter viktigare än likheter. Den mest fundamentala olikheten i sannolikhetsteori (om än något malplacerad i vår grundkurs) är

Sats 4.16. (Tjebysjevs olikhet) $\mathbf{P}(|X-\mu_X| > k\,\sigma_X) \le \frac{1}{k^2}$ för $k > 0$.

Bevis. Överkurs. Enligt 5 i sats 4.3 och 1 i sats 4.7 är

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(|X-\mu_X| > k\,\sigma_X) &= \int_{(x-\mu_X)>k\sigma_X} f_X(x)\, dx \\
&\le \int_{(x-\mu_X)>k\sigma_X} \frac{(x-\mu_X)^2}{k^2\sigma_X^2}\, f_X(x)\, dx \le \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu_X)^2}{k^2\sigma_X^2}\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{k^2}. \quad \square
\end{aligned}
$$

Tillförlitlighetsteori. En systemkomponent håller en kontinuerlig stokastisk tid $T > 0$.

Definition 4.17. Överlevnadsfunktionen ("reliability function" i M&A) är

$$R_T(t) = \mathbf{P}(T > t) = 1 - F_T(t) \quad \text{för } t \ge 0.$$

Definition 4.18. Felintensiteten (engelska "hazard rate") är

$$\rho_T(t) = f_T(t)/R_T(t) = f_T(t)/(1 - F_T(t)) \quad \text{för } t \ge 0.$$

Sats 4.19. $\rho_T(t) = \lim\limits_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}(T \in [t, t+\Delta t\,] \,|T > t)$.

Bevis. Eftersom $f_T(t)$ är derivatan av $F_T(t)$ ger 4 i sats 4.3 tillsammans med definitionen av betingad sannolikhet att

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{P}(T \in [t, t+\Delta t] \,|\, T > t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\mathbf{P}(T \in [t, t+\Delta t],\, T > t)}{\Delta t\, \mathbf{P}(T > t)}$$

$$= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{F_T(t+\Delta t) - F_T(t)}{\Delta t\,(1 - F_T(t))} = \frac{f_T(t)}{1 - F_T(t)} = \rho_T(t). \qquad \square$$

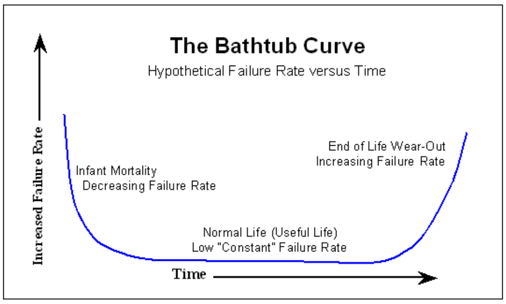
Sats 4.20. $R_T(t) = \exp(-\int\limits_0^t \rho_T(s)\, ds)$.

Bevis. Eftersom $T > 0$ är $F_T(0) = 0$ så att

$$\exp\Big(-\int_0^t \rho_T(s)\, ds\Big) = \exp\Big(-\int_0^t \frac{f_T(s)}{1 - F_T(s)}\, ds\Big)$$

$$= \exp\big(\big[\ln(1 - F_T(s))\big]_0^t\big) = (1 - F_T(t)) - (1 - F_T(0)) = R_T(t). \quad \square$$

Exempel 4.7. Ett klassiskt exempel på en felintensitet använd i teknik mm. är

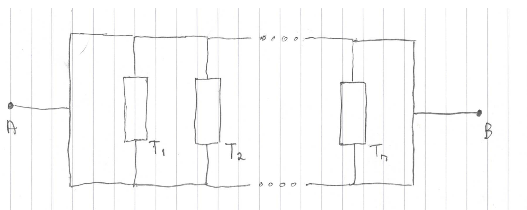


Tex. kan man tänka sig denna felintensitet är relevant för funktionen av en bil.

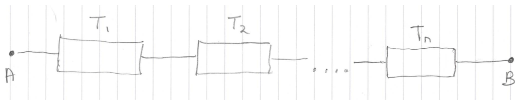
Weibull fördelning användes mycket i tillförlitlighet och för den är

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^t f_T(t)\, dx = \int_0^t \alpha\beta\, x^{\beta-1}\, \mathrm{e}^{-\alpha x^\beta}\, dx = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t^\beta} \quad \Rightarrow \quad \rho_T(t) = \ldots = \alpha\beta\, t^{\beta-1}.$$

Vi studerar tillförlitlighetssystem byggda av två slags grundkopplinar – parallellkoppling



som fungerar då minst en av ingående komponenterna fungerar och seriekoppling



som fungerar då alla ingående komponenterna fungerar. I dessa kopplingar förutsättes ingående komponenternas livslängder $T_1, \ldots, T_n$ vara oberoende (stokastiska variabler).

Sats 4.21. Parallellkoppling har överlevnadsfunktion $1-(1-R_{T_1}(t))\ldots(1-R_{T_n}(t))$.

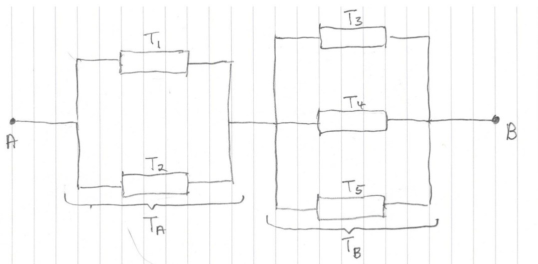
Bevis. Om parallellkopplingens livslängd betecknas T är pga. oberoende för $T_1, \ldots, T_n$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T > t) &= \mathbf{P}(\max(T_1, \ldots, T_n) > t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(\max(T_1, \ldots, T_n) \le t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(T_1 \le t, \ldots, T_n \le t) \\ &= 1 - \mathbf{P}(T_1 \le t) \ldots \mathbf{P}(T_n \le t) = 1 - F_{T_1}(t) \ldots F_{T_n}(t).\end{aligned}$$ □

Sats 4.22. Seriekoppling har överlevnadsfunktion $R_{T_1}(t) \ldots R_{T_n}(t)$.

Bevis. $\mathbf{P}(T>t) = \mathbf{P}(\min(T_1, \ldots, T_n)>t) = \mathbf{P}(T_1>t, \ldots, T_n>t) = R_{T_1}(t) \ldots R_{T_n}(t)$. □

Exempel 4.8. Tillförlitlighetssystemet



med livslängd T kan analyseras som seriekopplingen

som enligt sats 4.22 har tillförlitlighetsfunktion

$$R_T(t) = R_{T_A}(t)\, R_{T_B}(t)$$

där T_A och T_B är livslängder för parallellkopplingar för vilka enligt sats 4.21

$$R_{T_A}(t) = 1 - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) \qquad \text{och} \qquad R_{T_B}(t) = 1 - F_{T_3}(t)F_{T_4}(t)F_{T_5}(t).$$

Varje bygge av serie- och parallellkopplingar kan analyseras analogt exempel 4.8.

Transformation av kontinuerlig stokastisk variabel. Om X är en kontinuerlig stokastisk variabel med frekvensfunktion $f_X(x)$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en deriverbar och strikt växande funktion, vilken frekvensfunktion får då $Y = g(X)$? Svar:

Sats 4.23. $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\, \frac{d}{dy} g^{-1}(y)$.

Bevis. Eftersom $F_X'(X) = f_X(x)$ är mha. vanlig inre derivata

$$f_Y(y) = \tfrac{d}{dy}\,\mathbf{P}(g(X) \le y) = \tfrac{d}{dy}\,\mathbf{P}(X \le g^{-1}(y)) = \tfrac{d}{dy}\,F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y))\,\frac{d}{dy} g^{-1}(y). \quad \square$$

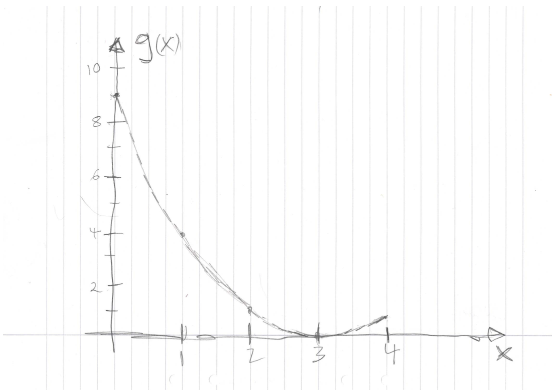
Överkurs. Vad händer om g istället är strikt avtagande?

Se exempel 4.10 nedan för ett exempel på användning av sats 4.23.

Beviset ovan fungerar bara för strikt monotona funktioner g. Jag illustrerar nu hur man kan göra för icke-monotona g med ett exempel:

Exempel 4.9. (Example 4.8.2 M&A) Om X är Uni$[0,4]$ och $g(x) = (x-3)^2$ vad blir frekvensfunktionen $f_Y(y)$ för $Y = g(X)$?

Lösning. Notera att grafen av $g(x)$ är en parabel



så g är ej monoton och sats 4.23 kan ej användas. Istället beräknar vi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y \le y) = \mathbf{P}((X-3)^2 \le y) &= \mathbf{P}(-\sqrt{y} \le X - 3 \le \sqrt{y}\,)\\ &= \mathbf{P}(3 - \sqrt{y} \le X \le 3 + \sqrt{y}\,)\\ &= (3+\sqrt{y})/4 - (3-\sqrt{y})/4 = \sqrt{y}/2\end{aligned}$$

för $y \in [0,1]$ så $f_Y(y) = 1/(4\sqrt{y}\,)$ för $y \in [0,1]$, medan

$$\mathbf{P}(Y \le y) = \tfrac{1}{4} + \mathbf{P}(-\sqrt{y} \le X - 3 \le 0) = \tfrac{1}{4} + \mathbf{P}(3 - \sqrt{y} \le X \le 3) = \tfrac{1}{4} + \sqrt{y}/4$$

för $y \in (1,9]$ så $f_Y(y) = 1/(8\sqrt{y}\,)$ för $y \in (1,9]$. Vi kollar arean under $f_Y(y)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{dy}{4\sqrt{y}} + \int_1^9 \frac{dy}{8\sqrt{y}} = \big[\sqrt{y}/2\big]_0^1 + \big[\sqrt{y}/4\big]_1^9 = (\tfrac{1}{2} - 0) + (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) = 1.$$

Simulering av kontinuerlig stokastisk variabel. Hur gör man en observation av en kontinuerlig stokastisk variabel X med fördelningsfunktion $F_X(x)$ i dator? Svar:

Sats 4.24. Tag en stokastisk variabel ξ som är Uni$[0,1]$ och sätt $X = F_X^{-1}(\xi)$.

Trippel överkurs. Satsen förutsätter att $F_X(x)$ är inverterbar (dvs. strikt växande och inte bara växande). Men är sann i allmänhet [för alla $F_X(x)$] om den vanliga inversen $F_X^{-1}(x)$ ersättes med den sk. högerinversen $F_X^{\leftarrow}(x) = \min\{y \in \mathbb{R} : F_X(y) \geq x\}$.

Bevis. Enligt exempel 4.1 är

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(F_X^{-1}(\xi) \leq x) = \mathbf{P}(\xi \leq F_X(x)) = F_\xi(F_X(x)) = F_X(x). \qquad \square$$

Exempel 4.10. Hur simulerar man en stokastisk variabel X som är Exp(β)?

Lösning. Eftersom enligt exempel 4.2 $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x/\beta}$ som är lika med y för $x = -\ln(\beta\,(1-y)) = F_X^{-1}(y)$ blir receptet $X = F_X^{-1}(\xi) = -\ln(\beta\,(1-\xi))$.

Vi kan dubbelkontrollera resultatet i lösningen genom använda sats 4.23 till att räkna ut frekvensfunktionen $f_Y(y)$ för transformationen $Y = g(\xi) = -\ln(\beta\,(1-\xi)) = F_X^{-1}(\xi)$ av ξ med invers $g^{-1}(y) = F_X(y) = 1 - \mathrm{e}^{-y/\beta}$ så att

$$f_Y(y) = f_\xi(g^{-1}(y))\,\tfrac{d}{dy}g^{-1}(y) = 1 \cdot \tfrac{d}{dy}(1 - \mathrm{e}^{-y/\beta}) = \tfrac{1}{\beta}\,\mathrm{e}^{-y/\beta}.$$

Överkurs. Eftersom (enligt exempel 4.1)

$$\mathbf{P}(1-\xi \leq x) = \mathbf{P}(\xi \geq 1-x) = 1 - \mathbf{P}(\xi < 1-x) = 1 - (1-x) = x$$

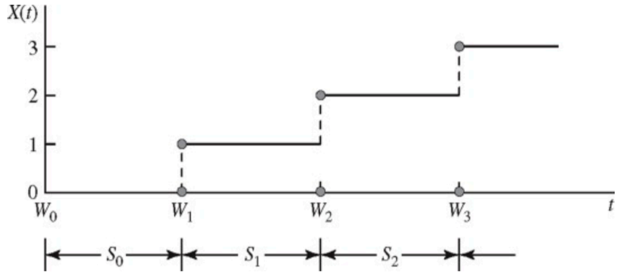
är $1-\xi$ också Uni$[0,1]$ så vi kan även ta $X = F_X^{-1}(1-\xi) = -\ln(\beta\xi)$. Givetvis är $F_X^{-1}(1-\xi) \neq F_X^{-1}(\xi)$ men båda är observationer av en Exp(β) stokastisk variabel.

Poisson process. En Poisson process med parameter eller intensitet (engelska "intensity" eller "rate") $\lambda > 0$ är ett stokastiskt tidsförlopp $X(t)$, $t \geq 0$, dvs. för varje reell tid $t \geq 0$ finns ett stokastiskt Poisson process värde (=en stokastisk variabel) $X(t)$.

Det stokastiska tidsförloppet $X(t)$, $t \geq 0$ har vidare följande definierande egenskaper:

1. $X(0) = 0$,
2. $X(t)$ ökar värde med en enhet i taget, dvs. det finns stokastiska tider $0 = W_0 < W_1 < W_2 < \ldots$ sådana att $X(t) = i$ för $t \in [W_i, W_{i+1})$ för $i = 0, 1, 2, \ldots$,
3. tiden mellan (enhets-) "hopp" $S_0 = W_1$, $S_1 = W_2 - W_1$, $S_2 = W_3 - W_2, \ldots$ [dvs. de tider $X(t)$ befinner sig på sina olika möjliga värden $i = 0, 1, 2, \ldots$ innan den byter till nästa värde $i+1$] är oberoende exponentialfördelade med parameter $\beta = 1/\lambda$.

Egenskaperna ovan är definierande eftersom de är tillräcklig information för kunna tillverka observationer av processen i dator. Och de får följande principiella utseende:



När man ritar sådan bild menas att man först utför alla slumpexperiment och registrerar deras utfall så alla inblandade stokastiska variablers värde kan bestämmas och sedan använder man dem till att fabricera och plotta processen enligt receptet ovan.

Sats 4.25. $X(t)-X(s)$ är Poisson fördelad med parameter $\lambda\,(t-s)$ för $0\le s\le t$ så speciellt $X(t)$ är Poisson fördelad med parameter $\lambda\, t$.

Bevis. Dubbel överkurs. Inse mha. exempel 4.2 och 4.5 att $W_k = S_0+\ldots+S_{k-1}$ är gammafördelad med parametrar $\alpha = k$ och $\beta = 1/\lambda$ samt mha. partialintegrering att $\Gamma(k) = (k-1)!$. Nu följer andra påståendet mha. exempel 3.4:

$$\begin{aligned}
m_{X(t)}(s) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{sX(t)}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{sk}\,\mathbf{P}(X(t)=k)\\
&= \mathbf{P}(X(t)=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{sk}\,\mathbf{P}(W_k\le t< W_k+S_k)\\
&= \mathbf{P}(t<S_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{sk}\int_0^t f_{\mathrm{gamma}(k,1/\lambda)}(x)\,\mathbf{P}(S_k>t-x)\,dx\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{sk}\,\frac{\lambda^k x^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}\,dx\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} + \mathrm{e}^{s}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda\,x\,\mathrm{e}^{s}}\,dx = \mathrm{e}^{\lambda t(\mathrm{e}^{s}-1)} = m_{\mathrm{Poisson}(\lambda t)}(s).
\end{aligned}$$

Första påståendet följer av det andra om $X(t)-X(s)$ har samma fördelning som $X(t-s)$. Detta i sin tur följer av att exponentialfördelningen saknar minne:

$$\mathbf{P}(S_k{>}x{+}y|S_k{>}x) = \frac{\mathbf{P}(S_k{>}x{+}y,\,S_k{>}x)}{\mathbf{P}(S_k{>}x)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} = \mathrm{e}^{-\lambda y} = \mathbf{P}(S_k{>}y)\ \text{ för } x,y\ge 0. \ \square$$

Exempel 4.11. Om man med början tiden $t=0$ registrerar det (stokastiska) totala antalet bilar $X(t)$ som har passerat på en väg till tiden t för $t\ge 0$ är det allmänt accepterat att $X(t)$ väl överensstämmer med en Poisson process.

Samma sak om man vid tiden $t=0$ börjar registrera det totala antalet radioaktiva sönderfall $X(t)$ till tiden t för $t\ge 0$ för ett radioaktivt preparat.