Kapitel 1

MVE090

2.

I ett urval på 75 broar i en stat har 30 svagheter?
Vad är sannolikhetn att nästa har svaghter.

Relativ fekvens

$\frac{30}{75}$ Relative frequncy approxiation $P(A) = \frac{\text{\# tensade med } A}{\text{\# tot testade}}$

4. I fabrik som tillverkar bromsklossar finns ett visst parti av 50 st. inehåller 2 st. med ojämnheter. Om 1 av dessa väljs slumpmässigt för att monteras i din bil, vad är sannolikheten att den har ojämnheter?

$$\frac{2}{50} = \frac{1}{25}$$

Klassik sannolikhet

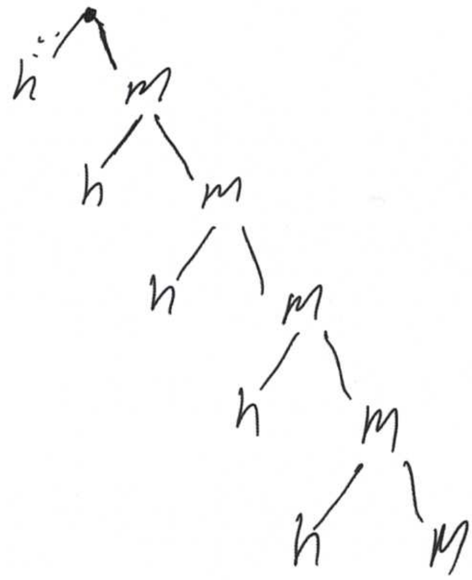
$$P(A) = \frac{\#\text{ sätt A kan hända på}}{\#\text{ sätt exprimentet kan utfalla på}}$$

8 Ett missilbatteri kan avfyra 5 missiler. När målet träffas uphör skutandet.

a) Rita träd för möjliga händelser.

h-hit

m-miss



b) Skilnad från 1.2.3?

Den fortsätter medan denna slutar efter 5.

c) Vilka är de möjliga händelserna?

$S = \{h, mh, mmh, mmmh, mmmmh, mmmmm\}$

d) Lista utfallen som utgör

A_1: exakt två skott avfyras

A_2: Högst två skott avfyras ≤ 2

Är händelserna ömsesidigt uteslutande?

$A_1 = \{mh\}$

$A_2 = \{h, mh\}$

$A_1 \cap A_2 = \{mh\} \neq \emptyset$

Altså ej ömsesidigt uteslutande.

14. Lagrings enheterna i datorer kallas bits och är antingen 1 eller 0. För att lagra bilder kodas dessa som pixlar, där varje pixel har en färg. T.ex. har en pixel med fyra olika grå färger kodas med två bits genom att koda färgerna som 00, 01, 10, 11

svart (00) vit (11)

a) Hur många grå färger kan kodas med 4 bits?

1/0

Varje bit kan ses som en händelse med 2 utfall. Vi har 4 följande händelser.

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$$

$$2^4 = 16$$

b) Hur många bits behövs för att få 32 olika färger?

$$2^n = 32$$

$$2^n = 2\cdot 16$$

$$2^n = 2\cdot 2^4$$

$$2^n = 2^5$$

$$n = 5$$

18 En köpare har 8 leverantörer att välja på för att köpa elektronik. Köpare väljer 3 slumpmässigt som får ge ~~ett~~ förslag.

Om du är en av leverantörerna vad är sannolikheten att du får ge ett förslag.

8 - leverantörer

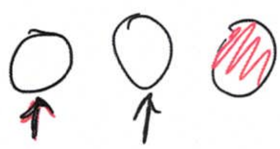
3 - väljs

$$\frac{\#\text{utfall där du får ge förslag}}{\#\text{ totalt antal utfall}}$$

totalt antal utfall

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\;5!} = \frac{4\cdot 8\cdot 7\cdot \cancel{6}^{2}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = 4\cdot 7\cdot 2 = \underline{\underline{56}}$$

utfall där du får ge förslag



$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 7\cdot 3 = 21$$

$$\frac{21}{56} = \frac{\cancel{7}\cdot 3}{4\cdot \cancel{7}\cdot 2} = \frac{3}{8}$$

Alternativ 2

Räkna med kompliment händelse.

$1 - P(\text{inte vald})$

$P(\text{inte vald}) = \frac{\cancel{7}}{8} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \cdot \frac{5}{\cancel{6}} = \frac{5}{8}$

$1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

22 Ett företag ska få 20 hårddiskar levererade. För att kolla kvaliteten testas 5 slumpmässigt, om alla fungerar accepteras leveransen annars skickas alla tillbaka. Om 3 är trasiga vad är sannolikheten att alla skickas tillbaka?

Kompliment händelse

$$P(\text{tillbaka}) = 1 - P(\text{Accept})$$

$$P(\text{Accept}) = \frac{\cancel{17}}{\cancel{20}_{4}} \cdot \frac{\cancel{16}}{19} \cdot \frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{18}_{9}} \cdot \frac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{17}} \cdot \frac{13}{\cancel{16}} = \frac{\cancel{3} \cdot 7 \cdot 13}{4 \cdot 19 \cdot \cancel{9}3} =$$

$$= \frac{7 \cdot 13}{4 \cdot 19 \cdot 3} = \frac{91}{228}$$

$$P(\text{tillbaka}) = 1 - \frac{91}{228} = \frac{228-91}{228} = \frac{137}{228} \approx 0.6$$

Alternativ 2 (troligen vad boken tänkt sig)

$$P(\text{tillbaka}) = 1 - P(\text{accept}) = 1 - \frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}} = 1 - \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}$$

Kapitel 2

2. Metall stölder är ett problem sannolikheten att en given metall ingår i en stöld ges av:

Tenn: 1/35
Stål: 11/35
Koppar: 8/35
Titan: 1/35
Platinum: 1/35
gold: 5/35
aluminium: 2/35
Nickel: 1/35
Zinc: 1/35
Silver: 4/35

(Notera att dessa är ömsesidigt uteslutande.)

a) Vad är sannolikheten att guld silver eller platinum ingår i en viss stöld?

Au - Guld
Ag - Silver
Pt - Platinum

$$P(Au \cup Ag \cup Pt) = \{\text{ömsesidig uteslutande}\} =$$

$$= P(Au) + P(Ag) + P(Pt) = \frac{5+4+1}{35} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

b) Vad är sannolikheten att stål inte ingår i en stöld?

$P(\text{Stål}^c) = 1 - P(\text{Stål}) = 1 - \frac{11}{35} = \frac{24}{35}$

4 I ett rymdskepp finns en motor komponent som består av två parallella enheter (dvs komponenten funkar om någon av dem funkar). Huvud komponenten funkar med 95% sannolikhet och backupen fungerar med 80% sannolikhet. Komponenten som en helhet fungerar 99% sannolikhet.

Vad är sannolikheten att båda funkar?

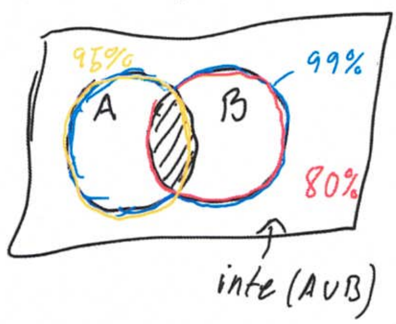
A- Huvud komponenten fungerar

B- Back Up komponenten fungerar

Sökt

$P(A \cap B)$

$P(A) = 95\%$ $P(B) = 80\%$ $P(A \cup B) = 99\%$



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$99\% = 95\% + 80\% - P(A \cap B)$

$\underline{P(A \cap B) = 76\%}$

Att endast Back Up funkar?

$P(B \cap \text{inte } A) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(B \cap \text{inte } A) = 80\% - 76\% = \underline{4\%}$

Att endast huvudkomponenten fungerar?

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 95\% - 76\% = \underline{\underline{19\%}}$

Sannolikheten att motorn inte funkar?

$P(\text{inte } (A \cup B)) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 99\% = 1\%$

6 När en dator kraschar är det 75% sannolikhet att det är överbelastning och 15% sannolikhet att det är ett mjukvaruproblem. Det är 85% sannolikhet att det är överbelastning eller mjukvare problem.

Vad är sannolikheten att det är båda?

Sökt
$P(A \cap B)$

A - överbelastning Problem $P(A) = 0.75$

B - Mjukvara Problem $P(B) = 0.15$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cup B) = 0.85$

$0.85 = 0.75 + 0.15 - P(A \cap B)$

$0.05 = P(A \cap B)$

5%

Vad är sannolikheten att det är mjukvara men inte överbelastning?

$P(B \cap \text{inte } A) = P(B) - P(B \cap A) = 0.15 - 0.05 = 0.10$

10%

14 Samma data som uppgift 4.

a) Vad är sannolikheten att backup motorn fungerar givet att huvud motorn går sönder?

B - BackUp fungerar

A - Huvud fungerar

givet

$$P(B \mid A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{0.04}{0.05} = \frac{4}{5} = 0.8$$

b) Är
$P[\text{Backup Funkar}] = P[\text{Backup Funkar} \mid \text{Huvud Fail}]$?

$P(B) = 0.8$

$P(B \mid A^c) = 0.8$

De är samma då motordelarnas funktion är oberoende av varandra. Att så är fallet är i sin tur faktiskt givet i uppgiften eftersom

$P(A \cap B) = 0.76 = 0.99 \cdot 0.8 = P(A) \cdot P(B)$

20 Betrakta ditt svar på fråga 14

Är

B: Backup motorn fungerar

A^c: Huvud motorn failar

oberoende? $P(B \cap A^c) = P(A^c) P(B)$

$$P(B \mid A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = P(B)$$

$$P(B \cap A^c) = P(A^c) \cdot P(B)$$

dvs oberoende

dvs svar Ja.

24 De vanligaste vatten förorenigarna är organiska
Det mesta organiska matrialet bryts ned av bakterier som behöver syre, ett överskott av biologiskt material kan leda till syre fattighet.

BOD står för syrebehovet för bakterier.

I floder nära industrin hade 35% högt BOD 10% var sura och 40% av de sura hade högt BOD. Hitta sannolikheten att ett flod har båda egenskaperna.

Sökt
$P(\text{Högt BoD} \cap \text{Sur})$

$P(\text{Högt BoD}) = 0.35$

$P(\text{sur}) = 0.10$

$P(\text{Högt BoD} | \text{Sur}) = 0.4$

$$P(\text{Högt BoD} | \text{sur}) = \frac{P(\text{Högt BoD} \cap \text{Sur})}{P(\text{sur})}$$

$$0.4 = \frac{P(\text{Högt BoD} \cap \text{Sur})}{0.1}$$

$P(\text{Högt BoD} \cap \text{Sur}) = 0.04$

30 Antag att det är 50% sannolikhet att en hårdisk skadas vid åsknedslag i enelledning.
Antag att det är 5% chans för åska på en sommar dag och 0.1% att åskan slår ner i elledningen.

Vad är sannolikheten att åskan slår ned en elledning och att hårddisken skadas under nästa åskoväder.

$P(\text{skadas} / \text{Åsknedslag}) = 0.50$

$P(\text{Åska}) = 0.05$

$P(\text{Åsk nedslag} / \text{Åska}) = 0.001$

$P(\text{Skadas} \cap \text{Åsknedslag} / \text{Åka}) =$

$= P(\text{skadas}/\text{nedslag}) \cdot P(\text{nedslag} / \text{Åska}) = 0.5 \cdot 0.001 = 0.0005$

$= \frac{1}{2000}$

32

Låt A_1, A_2 vara ömsesidigt uteslutande händelser sådan att $P(A_1)P(A_2) > 0$

Visa att A_1, A_2 är icke oberoende.

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

$$P(A_1) \cdot P(A_2) > 0$$

$$P(A_1 \cap A_2) \overset{\text{om oberoende}}{=} P(A_1) \cdot P(A_2) > 0$$

$$\parallel$$

$$P(\emptyset) = 0$$ vilket ger

motsägelse – alltså icke oberoende V.S.V

36

50% av alla producerade datorchip är defekta inspektioner gör att bara 5% av de som säljs lagligt är defekta.
De stulna säljs utan inspektion.
Om 1% av alla chip på marknaden är stulna vad är sannolikheten att ett chip är stulet givet att det är trasigt?

Sökt

P(stulet/trasigt)

P(trasigt/stulet) = 0.50

P(traigt/stulet^c) = 0.05

P(stulet) = 0.01

$$P(\text{stulet} \mid \text{trasigt}) = \frac{P(\text{stulet} \cap \text{trasigt})}{P(\text{trasigt})} =$$

$$= \frac{P(\text{trasigt} \mid \text{stulet}) \cdot P(\text{stulet})}{P(\text{trasigt})} \quad *$$

Vad är $P(\text{trasigt})$?

Antingen trasigt $\cap$ stulet

eller trasigt $\cap$ stulet^c

summera:

$$P(\text{trasigt}) = P(\text{trasigt} \cap \text{stulet}) + P(\text{trasigt} \cap \text{stulet}^c) =$$

$$= P(\text{trsigt} \mid \text{stulet}) \cdot P(\text{stulet}) + P(\text{trasigt} \mid \text{stulet}^c) \cdot P(\text{stulet}^c) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.01 + 0.05 \cdot 0.99 = 0.0545$$

$$* \quad \frac{P(\text{trasig} \mid \text{stulet})\, P(\text{stulet})}{P(\text{trasigt})} = \frac{0.5 \cdot 0.01}{0.0545} =$$

$$= 0.0917\ldots \approx 0.092 \approx 9.2\%$$

Klasho@student.chalmers.se

Alternativ 2 Det som boken tänkt sig för detta tal är att man skall använda sats 2.4.1 "Bayes' theorem" istf mer eller mindre bevisa denna (iofs mycket enkla) sats själv som i första lösningen. Enligt "Bayes' theorem" blir lösningen

$$P(\text{stulet} \mid \text{trasigt}) = \frac{P(\text{trasigt} \mid \text{stulet})P(\text{stulet})}{P(\text{trasigt} \mid \text{stulet})P(\text{stulet}) + P(\text{trasigt} \mid \text{stulet}^c)P(\text{stulet}^c)}$$

$$= \left[1 + \frac{P(\text{trasigt} \mid \text{stulet}^c)\,P(\text{stulet}^c)}{P(\text{trasigt} \mid \text{stulet})\,P(\text{stulet})}\right]^{-1}$$

$$= \left[1 + \frac{0.05 \cdot 0.99}{0.5 \cdot 0.01}\right]^{-1} = (10.9)^{-1} = 0.0917\ldots$$