**Kapitel 8**

**8.2**

**Forskare har upptäckt att möjligheten att se och läsa vägskylt beror på hur ljust det är runt skylten. Man har mätt detta för 30 vägskyltar i canadela/m^2.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10.9 | 1.7 | 9.5 | 2.9 | 9.1 | 3.2 |
| 9.1 | 7.4 | 13.3 | 13.1 | 6.6 | 13.7 |
| 1.5 | 6.3 | 7.4 | 9.9 | 13.6 | 17.3 |
| 3.6 | 4.9 | 13.1 | 7.8 | 10.3 | 10.3 |
| 9.6 | 5.7 | 2.6 | 15.1 | 2.9 | 16.2 |

**a) Hitta sample variance.**

$$s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{30} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{30} x_i\right)^2}{n(n-1)} = \frac{30 \cdot 2821{,}6 - 66\,844}{30 \cdot 29} =$$

$$= \underline{\underline{20{,}43}}$$

**b) Antag att datan är normal fördelad. Hitta ett 90% konfidens intervall för variansen.**

$$\Rightarrow \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2} = 17{,}7$$

$$\chi^2_{n-1,\,\alpha/2} = 42{,}6$$

$$\Rightarrow CI = \left[\frac{20{,}43 \cdot 29}{42{,}6}, \frac{20{,}43 \cdot 29}{17{,}7}\right] =$$

$$= [13{,}9 ; 33{,}5]$$

**c) Hitta ett 90% CI för sigma**

$CI^{\sigma}_{0.9}$

Använder gränserna från b)

$$1-\alpha = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right) =$$

$$= P\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}} \leq \sigma^2 \leq \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}}\right)$$

Gränser från innan

$$\Rightarrow CI^{\sigma}_{0.9} = [\sqrt{13.9}, \sqrt{33{,}5}] = [3{,}73 ; 5{,}79]$$

**d) Tumregler för normal fördelningar säger att för en normal fördelad slumpvariabel är det 95% sannolikhet att ligga inom 2 standardavvikelser från medelvärdet. Använd Xbar och sample variansen för att skatta mu respektive sigma. Är det ovanligt att ljuset runt en skylt är över 18 Cd/m^2? Förklara**

sats 8.1.1.

$$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$$

Sats 8.1.2

$100(1-\alpha)\%$ C.I. för $\sigma^2 = [L_1, L_2]$

$$L_1 = \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}$$

$$L_2 = \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}$$

$$1-\alpha = P\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} \leq (n-1)S^2/\sigma^2 \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{S^2(n-1)} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}{S^2(n-1)}\right) =$$

$$= P\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right)$$

Så $\left[\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$ är ett

$100(1-\alpha)\%$ CI för $\sigma^2$.

Tabell för $\chi^2$ (Tabell IV)

$\bar{X} = 8{,}62$ , $\quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{20{,}43} = 4{,}52$

$\bar{X} \pm 2s = 8{,}62 \pm 2 \cdot 4{,}52 = 8.62 \pm 9.04$

Med 95% sannolikhet ligger $\bar{X}$ i intervallet

$[-0.42, 17.66]$

Alltså ovaligt att se en skylt med belysning $18\ cd/m^2$.

**8.8**

**När man gör vindrutor vill man att alla ska bli lika tjocka. Hitta ett ensidigt 95% CI för sigma om ett sample på 10 vindrutor ger s=0.01.**

$$1-\alpha = P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{n-1,\alpha}\right) = P\left(\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}}\right) =$$

$$= P\left(\sigma \leq \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\alpha}}}\, s\right) = P\left(\sigma \leq \sqrt{\frac{9}{3.33}} \cdot 0.01\right) =$$

$$= P(\sigma \leq 0.016)$$

$$CI = [0, 0.016]$$

**8.10**

**10 borrade hål har följande djup.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2.0 | 1.7 | 2.6 | 1.5 | 1.4 |
| 2.1 | 3.0 | 2.5 | 1.8 | 1.4 |

**a) använd den givna datan för att hitta Xbar, s^2, s.**

$\bar{X} = 2$ $\quad n=10$ $\quad s^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n(n-1)}$

$s^2 = 0.3022$

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0.3022} = 0.5497$

**b) Antag att datan kommer från en normal fördelning. Hitta ett 90% CI medeljupet hos hålen.**

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim T_{n-1} = T_9$

$CI: \bar{X} \pm t_{n-1,\alpha/2} \, s/\sqrt{n}$

$t^{n-1}_{\alpha/2}, \quad P(T \leq t_{n-1,\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = P(T \geq -t_{n-1,\alpha/2})$

Tabell för t fördelning. (Tabell VI)

$\Rightarrow \quad t_{n-1,\alpha/2} = 1.833$

$\bar{X} \pm t_{9,\alpha/2} \, s/\sqrt{n} = 2 \pm 1.833 \frac{0.5497}{\sqrt{10}} =$

$= [1.68; 2.32]$

**8.18**

**Man mäter kvävekoncentatiomen i sjövatten och tar 24 sampels. (Mätt i PPM)**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.042 | 0.023 | 0.049 | 0.036 | 0.045 | 0.025 |
| 0.048 | 0.035 | 0.048 | 0.043 | 0.044 | 0.055 |
| 0.045 | 0.052 | 0.049 | 0.028 | 0.025 | 0.039 |
| 0.023 | 0.045 | 0.038 | 0.035 | 0.026 | 0.059 |

**Hitta ett 95% CI hitta det ensidiga CI för det största tänkbara värdet på medelvärdet mu. För att det ska vara lämpligt som dricksvatten ska medelvärdet vara mindre än 0.7 PPM. Fungerar det?**

Antag $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P\left(\frac{\mu - \bar{X}}{s/\sqrt{n}} \leq t_{n-1,\,0.95}\right) = 0{,}95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\mu \leq \bar{X} + t_{n-1,\,0.95}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CI = \left[0,\ \bar{X} + t_{n-1,\,0.95}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$\bar{X} = 0.0399$

$s = 0.0106$

$n = 24$

$t_{n-1,\,0.95} = 1.714$

$$\Rightarrow \bar{X} + t_{n-1,\,0.95}\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} = 0.0399 + 1.714\cdot\frac{0.0106}{\sqrt{24}} =$$

$$= 0.436$$

Sannolikheten att $\mu \in [0, 0{,}0436]$ är 95%

Alltså tycks vara ok som drickvatten

med väntevärde lägre än 0.07.

8.22

**Medelvärdet för bakgrundsstrålning i USA har tidigare uppmäts till 0.3 rem/år. Man är rädd att detta ökat.**

**a) Ställ upp de korrekta och alternativa hypoteserna för att testa påståendet.**

$H_0: \mu \leq 0{,}3$

$H_1: \mu > 0{,}3$

**b)Förklara de praktiska konsekvenserna av ett typ I respektive ett typ II - fel.**

| uppmätt \ sant | $H_0$ sann | $H_1$ sann |
|---|---|---|
| $H_0$ sann | Rätt | typ II |
| $H_1$ sann | typ I | Rätt |

Typ I: är att vi säger att dosen ökat när den inte gjort det.

Typ II: säger att dosen inte ökat, när den i själva verket har gjort det.

8.26 Det önskas testa om $P(\text{data}=1) = 1 - P(\text{data}=0) = p$

$$H_0: p \geq .7$$
$$H_1: p < .7$$

med utgångspunkt från $n=10$ st $\{0,1\}$ data.

a) Finn den kritiska regionen för ett $\alpha = 0.05$ test.

<u>Lösning</u> $X$ = summa data $\approx N(np, np(1-p))$ så att

$$P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < -z_{0.05}\right) = P\left(X < 10\cdot 0.7 - 1.645\sqrt{10\cdot 0.7\cdot 0.3}\right)$$
$$= P(X < 7 - 2.38) = P(X < 4.62)$$
$$= 0.05$$

då $H_0$ sann. Man kan $H_0$ ej förkastas då $x=5$.

b) Kommer $H_0$ förkastas om $x=5$? Vilket slags fel kan man göra med denna test?

<u>Lösning</u> $H_0$ förkastas ej då $x=5$ och felet man då ev. kan göra (om $H_1$ sann) är typ I.

<u>Anmärkning</u> Denna uppgift är otydligt skriven av författarna.

**8.28**

**En firma producerar RAM-minnen. Tidigare har 20% av dessa har gått sönder under de 1000 första timmarna. Med en ny metall hoppas man att detta ska förbättras. Så man testar 20 st. minnen under 1000 timmar.**

**a) ställ upp en lämplig noll och alternativ hypotes.**

Låt $p$ = sannolikheten att minnet går sönder under de 1000 första timmarna.

$H_0: p \geq 0.2$

$H_1: p < 0.2$

**b) Förklara konsekvenserna av typ I och typ II fel.**

Typ I: Förkastar $H_0$ när $H_0$ är sann. Tror att nya metoden är bättre när den inte är det.

Typ II: Acceptera $H_0$ när $H_0$ är falsk. Missar möjligheten att förbättra produkten.

| Beslut \ Sant | $H_0$ sant | $H_1$ sant |
|---|---|---|
| Accept $H_0$ | Rätt | Typ II |
| Förkasta $H_0$ | Typ I | Rätt |

**c) Om H0 sann vad är förväntat antal som går sönder under 1000 första timmarna.**

$X$ = # som går sönder $\sim Bin(20, 0.2)$

$\Rightarrow E[X] = n \cdot p = 20 \cdot 0.2 = \underline{\underline{4}}$

**d) Låt oss säga att vi förkastar H0 om X=<1. Vad är alpha?**

$\alpha$ är sannolikheten att vi förkastar $H_0$ trots att $H_0$ är sann.

$\alpha = P(X \leq 1 \mid H_0) = P(X \leq 1 \mid p \geq 0.2) = \{\underset{I}{\text{tabell}}\} \leq 0.0692$

**e) Antag att det är viktigt att testet kan skilja p=0.2 och p=0.1. Hitta sannolikheten att testet inte klarar det. Alltså hitta beta för p=0.1. Hitta kraften för testet om p=0.1.**

$\beta = P(\text{typ II-fel}) = P(\text{förkasta inte } H_0 \mid p = 0.1) =$

$= P(X > 1 \mid p = 0.1) = 1 - P(X \leq 1 \mid p = 0.1) =$

$= 1 - 0.3917 = 0.6083$

Kraft (Power) $= P(H_0 \text{ förkastas} \mid H_1 \text{ sann}) = 1 - \beta = \underline{\underline{0.3917}}$

**f) Resultattet från e) pekar på att testet inte är kraftfullt nog att skilja väl mellan p=0.1 och p=0.2. Om vi behåller n=20 finns det något sätt vi kan öka kraften hos testet när p=0.1? Kommer alpha fortfarande vara litet nog? Om inte föreslå ett sätt designa testet som gör både alpha och beta litet nog.**

Kan öka kraften hos testet genom att öka värdet för vilket vi förkastar $H_0$.

Låt oss testa $\alpha$ om vi sätter gränsen vid $X=2$.

$\alpha = P(X \leq 2 | p=0.2) = 0.2061$ För stort?

$\beta = P(X > 2 | p=0.1) = 0.3231 \Rightarrow$ Power $= 1-\beta = 0.6769$

Finns det något sätt att designa om testet utan att öka sample sizen? med $\alpha$ & $\beta$ mindre

Svar Nej - n måste ökas!

**8.38**

**Vi har en model för oljeproduktion. Vi vet att den verkliga medelproduktionen är 9.5. fat/dag.**

**a) Hitta de kritiska värdena för att testa**

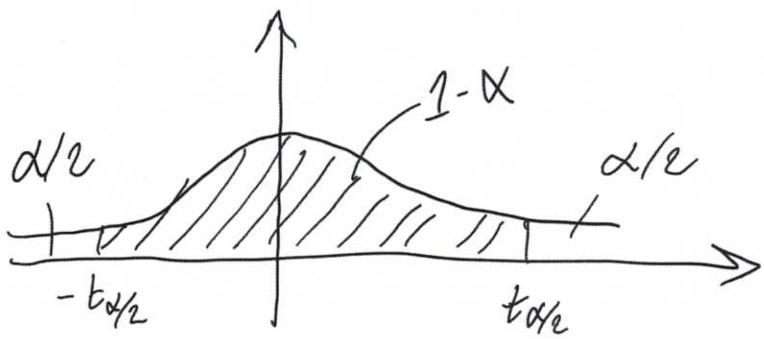
$H_0: \mu = 9.5 = \mu_0$

mot

$H_1: \mu \neq 9.5 = \mu_0$

Vid $\alpha = 0.05$ basserat på 50 simaleringar.

Under $H_0$: $\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1} = T_{49}$




Vill förkasta om $\bar{X}$ långt bort från $\mu_0$

$t_{49,\alpha/2} = 2.010$

så förkastar om

$$\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} < -t_{49,\alpha/2} \quad \text{eller} \quad \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{49,\alpha/2}$$

$$\bar{X} < \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{50}} \cdot 2.010 \quad \text{eller} \quad \bar{X} > \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{50}} \cdot 2.010$$

Kritiska värden

$\mu_0 \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,\alpha/2}$

**b) Antag vi från datan får medelvärdet Xbar=9.8 och s=1.2. Kan H0 förkastas vid alpha=0.05 signifikants nivå?**

$\bar{X} = 9.8$

$s = 1.2$

$\alpha = 0.05$

Eftersom $\bar{X} > \mu_0$ behöver vi bara kolla den övre gränsen.

$$\mu_0 + \frac{1.2}{\sqrt{50}} \cdot 2.010 = 9.8411 > 9.8$$

Altså är $\bar{X}$ inte i det kritiska område så förkastar inte $H_0$.

Vilken typ av fel riskeras?

Att $H_0$ accepteras men $H_0$ är falskt.

Typ II-fel.

**8.40**

**Man är orolig för att halten av en viss mineral har ökat i en flod under de senaste åren. Vi vet även att under 1982 var medelnivån 4.6 mg/l.**

**a) Ställ upp noll- och alternativ hypotes för att testa om medelhalten har ökat.**

$H_0: \mu = 4.6 = \mu_0$

$H_1: \mu > 4.6 = \mu_0$

b) **Ett stickprov på 28 värden ger Xbar = 5.2, s=1.6. Hitta p-värdet för testet och avgör om vi ska förkasta H0.**

Under $H_0: \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim T_{n-1} = \frac{\bar{X} - 4.6}{1.6/\sqrt{28}} \sim T_{27}$

$$P(\bar{X} \geq 5.2) = P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - 4.6}{1.6/\sqrt{28}}}_{T_{27}} \geq \frac{5.2 - 4.6}{1.6/\sqrt{28}}\right) =$$

$$= P(T_{27} \geq 1.984) = 1 - P(T_{27} \leq 1.984)$$

Tabell VI

$\Rightarrow P(T_{27} \leq 1.703) = 0.95$

$\Rightarrow P(T_{27} \leq 1.984) > 0.95$

alltså får vi

$P(\bar{X} \geq 5.2) < 0.05$

alltså kommer vi att förkasta $H_0$.

**c) vad innebär detta praktiskt?**

Att vi säger att halten har ökat.

**8.44**

**Vi har en samling data av uppmätta PH-värden. Vi vill att PH värdet ska vara 7.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6.2 | 6.5 | 7.6 | 7.7 | 7.0 |
| 7.0 | 7.2 | 6.8 | 7.5 | 8.1 |
| 7.1 | 7.0 | 7.1 | 7.8 | 8.5 |

**Baserat på dessa data finns det några bevis för att PH värdet inte ligger vid 7? Förklara baserat på p-värde hos det tvåsidiga testet. Om alpha varit satt som 0.1 hade H0 blivit förkastat?**

$\bar{X} = 7.27$

$s = 0.602$

$H_0: \mu = 7$

$H_1: \mu \neq 7$

$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim T_{n-1} = T_{14}$ , med $\mu = 7$ under $H_0$.

$t = \frac{7.27 - 7}{0.602/\sqrt{15}} = 1.7592$

Vad är p-värdet?

Vi kan titta på

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \geq t\right)$

Tvåsidigt så tittar även på

$P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq -t\right)$

t-fördelning är symetrisk så dessa värden är samma.

$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}\right| \geq t\right) = 2P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \geq t\right) =$

$= 2P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \geq 1.7592\right) = 2\left(1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} \leq 1.7592\right)\right) =$

$$= 2\left(1 - P\left(T_{14} \leq 1.7592\right)\right)$$

Tabell VI

$$\Rightarrow$$

$$P(T_{14} \leq 1.761) = 0.95$$

$$\Rightarrow P\left(T_{14} \leq 1.7592\right) < 0.95$$

$$\Rightarrow 2\left(1 - P\left(T_{14} \leq 1.7592\right)\right) > 2 \cdot 0.05 = 0.1$$

Dett finns inte jätte starka bevis för avvikelse från PH7.

För $\alpha = 0.1$ skulle vi inte förkastat $H_0$.

**8.48**

**Vi ska designa en simhall och oroar oss för akustiken. Ett designkrav är att det i medelvärde ska ta högst 1.3 s för en lågfrekvent ljudvåg att dö ut med en standard avvikelse på högst 0.6 s. Från 30 data simuleringar fås Xbar = 3.97, s = 1.89.**

**a) Testa**

$H_0: \mu = 1.3$ mot

$H_1: \mu > 1.3$

med $\alpha = 0.01$

under $H_0$: $T = \dfrac{\bar{X} - 1.3}{S/\sqrt{n}} \sim T_{29}$

$s = 1.89, \; \bar{x} = 3.97, \; n = 30$

$t = 7.377$

$P(T_{29} \geq t) < P(T \geq 2.462) = 0.01 = \alpha$

Skall alltså verkligen förkasta $H_0$.

**b) testa**

$H_0: \sigma = 0.6$
mot
$H_1: \sigma > 0.6$

Vid $\alpha = 0.01$ signifikans nivå.

Hypoteserna är ekvalenta med

$H_0: \sigma^2 = 0.36$
$\sigma^2 > 0.36$

Sats 8.1.1: $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$

Så under $H_0$:

$$P(S^2 > s^2) = P\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}\right) =$$

$$= P\left(\chi^2_{29} > \frac{29 \cdot 1.89^2}{0.36}\right) = 1 - P(\chi^2_{29} \leq 287.75) \approx 0$$

Tabell IV

Alltså förkastar vi även detta.

## 8.56

**Vi försöker bestämma hur många som behövs i en telefon support för ett datorcenter.**

**Låt X = tid det garvat besvara fråga i min.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1.5 | 1.0 | 5.0 | 1.9 | 3.0 |
| 1.3 | 2.1 | 1.7 | 6.5 | 4.2 |
| 6.3 | 5.6 | 5.1 | 2.5 | 6.9 |

**Vi vill analysera med sign-ranksum test**

$$W_+ = \sum_{\substack{\text{all pos} \\ \text{Ranks}}} R_i \qquad W_- = \sum_{\substack{\text{alla neg} \\ \text{Ranks}}} |R_i|$$

$$W = \min(W_+, W_-)$$

**a) vad är E[W]?**

$$E[W] = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{15 \cdot 16}{4} = \frac{240}{4} = 60$$

**b) Basserat på sign-rank-test kan vi dra slutsatsen att mediantiden är mindre än 5 minuter? Förklara baserat på p-värdet av testet.**

$H_0: M = 5$

$H_1: M < 5$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_i$ | 1.5 | 1.0 | 5.0 | 1.9 | 3.0 | 1.3 | 2.1 | 1.7 | 6.5 | 4.2 | 6.3 | 5.6 | 5.1 | 2.5 | 6.9 |
| $\lvert X_i - 5\rvert$ | 3.5 | 4 | 0 | 3.1 | 2 | 3.7 | 2.9 | 3.3 | 1.5 | 0.8 | 1.3 | 0.6 | 0.1 | 2.5 | 1.9 |
| Rank | 13 | 15 | 1 | 11 | 8 | 14 | 10 | 12 | 6 | 4 | 5 | 3 | 2 | 9 | 7 |
| Signed Rank | -13 | -15 | 1 | -11 | -8 | -14 | -10 | -12 | 6 | -4 | 5 | 3 | 2 | -9 | 7 |

$$W_+ = \sum_{\substack{\text{Pos} \\ \text{Ranks}}} R_i = 1+6+5+3+2+7 = 24$$

$$|W_-| = \sum_{\substack{\text{neg} \\ \text{Ranks}}} |R_i| = 13+15+11+8+14+10+12+4+9 = 96$$

Om $\mu < 5$ bör $W_+$ vara litet,

Vad är för litet?

Tabell

$n = 15,\ P = 0.05 \Rightarrow W_c = 30 \Rightarrow$ förkastar $H_0$

$n = 15,\ P = 0.025 \Rightarrow W_c = 25 \Rightarrow$ förkastar $H_0$

**Kapitel 9**

**9.2**

**En studie av en viss apparat visade att 75 av 193 apparater var trasiga när de testades.**

**a) Hitta punktskattningen för p.**

$$\hat{p} = \frac{75}{193} = 0.39$$

**b) Ge ett 95% CI för p.**

Om vi säger att $X_i = \begin{cases} 1 & \text{om apparat trasig} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Så är $\bar{X} = \hat{p}$ och CLT säger att

$\bar{X} \overset{approx}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$ där $\mu = E[X_i] = p$

$\sigma^2 = Var(X_i) = p(1-p)$

Så $P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{(\hat{p}-p)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$

Problem: Gränserna inehåller det okända p.

Lösning: Ersätt med skattningen $\hat{p}$

N eller $T_\gamma$? Bygger på CLT, så n redan antaget att vara stort $\Rightarrow T_\gamma \approx N$

$\Rightarrow$ CI för p: $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$

Har: $\hat{p} = 0.39$

$z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96 \Rightarrow$ tabell V

$CI = 0.39 \pm 0.0688 = [0.3198; 0.4574]$

**c) Hur stort sample behövs för att bestämma p till en gräns av 0.03 med 95% konfidens?**

Vi vill alltså ha

$$Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.03$$

$$\Rightarrow n = Z_{\alpha/2}^2 \cdot \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{0.03^2} = 1014.1$$

avrundar

$n = 1015$

**9.6**

**I USA identifierar man 30000 potentiellt farliga soptippar. Hur stort stickprov behövs för att bestämma andelen farliga soptippen med 2 procentenheters noggrannhet med 90% konfidens.**

$$n = z_{\alpha/2}^2 \frac{p(1-p)}{0.02^2}$$ (se övning 9.2)

I detta fall har vi inte $p$ eller $\hat{p}$?

Därför tänker jag att vi tar fram det största möjliga $n$. (för att vara säkra)

$p \in [0,1]$

$\max(p(1-p))$

derivera

$1 - 2p = 0$

$p = \frac{1}{2}$

$\max(p(1-p)) = \frac{1}{4}$

$$n = z_{0.05}^2 \cdot \frac{1/4}{0.02^2} = 1691.3$$

$n = 1692$ st

$1.645^2$ enligt tabell V

**9.10**

**En undersökning indikerade att en mariotet av investerings analytiker tror att det främsta problemet med sol energi är fallande elpriser. En ny undersökning görs för att se om detta fortfarande stämmer p=andel som fortfarande tror detta.**

**a) Ställ upp hypoteser**

$H_0: P = 0.5 = p_0$

$H_1: P > 0.5 = p_0$

**b) Undersökningen görs och 59 av 100 svarar att de instämmer. Räcker detta för att förkasta H0?**

Teststatistika:

$$T = \frac{(\hat{p} - p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{\text{CLT approx}}{\sim} N(0,1) \text{ under } H_0$$

$\hat{p} = 0.59, \quad p_0 = 0.5$

$T = 1.8$

normal tabell V

$$P(T \geq 1.8 | H_0) = 1 - P(T \leq 1.8 | H_0) \overset{\downarrow}{=}$$

$$= 1 - 0.9641 = \underline{\underline{0.0359}} < 0.05 = \alpha$$

Altså under $H_0$ är det 0.0359 sannolikhet att vi observerar 59 eller fler av 100. Vi kommer alltså förkasta $H_0$.

**c) Förklara resultatet**

En majoritet tror fortfarande att fallande elpriser är största problemet för solel.

**9.14**

**Motståndare till ett dammbygge hävdar att mindre än hälften av de som bor runt om är för dammbygget. En undersökning görs för att styrka detta.**

**a) Ställ upp hypoteser.**

$p$ = andel som är för

$H_0: p = 0.5 = p_0$

$H_1: p < 0.5 = p_0$

**b) Hitta det kritiska värdet för ett test med signifikansnivå alpha = 0.1.**

$\alpha = 0.1$

Teststatistika: $T = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \overset{\text{approx}}{\sim} N(0,1)$

Hitta $Z_\alpha$: $P(T < Z_\alpha) = 0.1$

Tabell V: $Z_\alpha = -1.282$

Kritiska värdet för $\hat{p}$:

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = -1.28 \Rightarrow \hat{p} = p_0 - \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \cdot 1.28$$

$$= 0.5 - \frac{1.28}{2\sqrt{n}}$$

**c) 500 pers. frågas 230 är för. Är påståendet styrkt?**

$\hat{p} = \frac{230}{500} = 0.46$

$n = 500 \Rightarrow$ Kritiskt värde $P_{krit} = 0.5 - \frac{1.28}{2\sqrt{500}} = 0.471$

$\hat{p} < P_{krit} \Rightarrow$ förkastar $H_0$ och tror mer på $H_1$ att $< 50\%$ är för.

**d) Vilket typ av fel riskerar vi?**

Här riskerar vi att förkasta $H_0$ när den är sann alltså typ I fel.

Om detta är fallet och bygget stoppas har vi kanske givit en felaktig bild av vad folk tycker.

9.18

**Det finns en ny typ av betong. Av 50 nya byggnader i Dallas används den nya betongen i 15 fall. I Boston används den 15 av 60.**

**a) Låt**

**P1 = andel byggnader i Dallas med ny betong**

**P2 = andel byggnader i Boston med ny betong**

**Hitta punktskattningar för P1, P2 och P1-P2.**

Jämföra två andelar:

$$\hat{P}_1 = \frac{15}{50} = 0.3, \quad \hat{P}_2 = \frac{15}{60} = 0,25$$

$$\widehat{P_1 - P_2} = \hat{P}_1 - \hat{P}_2 = 0.3 - 0.25 = 0.05$$

**b) Hitta ett 95% CI för P1-P2.**

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 \overset{\text{approx}}{\sim} N\left(P_1 - P_2, \frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}\right) \quad \text{Thm } 9.3.1$$

$$I: \hat{P}_1 - \hat{P}_2 \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}$$

$$\Rightarrow P\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \leq P_1 - P_2 \leq \hat{P}_1 - \hat{P}_2 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}\right) = 0.95$$

$n_1 = 50$, $n_2 = 60$, $Z_{\alpha/2} = 1.96$

$P_1$ och $P_2$ ersätts med skattare

$\hat{P}_1 = 0,3$, $\hat{P}_2 = 0.25$

$$CI = 0.3 - 0.25 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{50} + \frac{0.25 \cdot 0.75}{60}} =$$

$$= [-0.118; 0.218]$$

**c) Skulle du bli förvånad om någon påstod att ny betong används betydligt oftare i Dallas än i Boston?**

Ja, eftersom OECI är detta inte särskilt otänkbart.

**9.27**

**Man tror att andelen felaktiga kretsar av typ A (P1) är mindre än för typ B (P2).**

**a) Ställ upp hypoteser för att testa detta.**

$H_0: P_1 = P_2 \qquad (P_1 - P_2 = 0)$

$H_1: P_1 < P_2 \qquad (P_1 - P_2 < 0)$

**b) Vad är det kritiska värdet för ett test med signifikansnivå alpha = 0.1?**

Under $H_0$ är $p_1 = p_2 = p$

$$\left(\text{Test statistika: } T = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})(1/n_1 + 1/n_2)}} \overset{approx}{\sim} N(0,1)\right)$$

Left tailed test, vill hitta

$Z_\alpha : P(T < Z_\alpha | H_0) = 0.1$

$\Rightarrow \underline{\underline{Z_\alpha = -1.28}}$

$$\hat{p} = \frac{n_1 \hat{P}_1 + n_2 \hat{P}_2}{n_1 + n_2}$$

**c) Tvåtusen av varje typ testas. 3 av typ A är felaktiga och 5 av typ B är felaktiga. Skatta P1, P2, P1-P2. Kan H0 förkastas vid signifikansnivå alpha=0.1?**

$$\hat{P}_1 = \frac{3}{2000} = 0.0015 \qquad n_1 = n_2 = 2000$$

$$\hat{P}_2 = \frac{5}{2000} = 0.0025$$

$$\hat{P}_1 - \hat{P}_2 = -0.001$$

$$\hat{p} = \frac{3+5}{4000} = \frac{8}{4000} = 0.002$$

$$T = \frac{-0.001}{\sqrt{0.002 \cdot 0.998 \cdot (2/2000)}} = -0.7078 > Z_\alpha = -1.28$$

förkastar alltså inte $H_0$.