# Kapitel 3

## Identifiera som diskret variabel eller inte.

2. M: antalet meteoriter som träffar en satellit per dag.

4. Neutroner som avges vid fission är antingen "prompt" eller "delayed". De "prompt" skickas ut inom 10^-14 s, de "delayed" under en period på timmar. Låt D beteckna beteckna tiden det tar en en delayed neutron att skickas ut vid en fission.

6. Antalet elavbrott per månad i Tennesse Valley elnätverk.

3.2.

M: Meteoriter/dag

Diskret stokastisk variabel ty de möjliga värden för varje dag är 0, 1, 2, ... .

3.4.

D: Kontinuerlig ty det handlar om tid.

3.6.

Diskret av samma skäl som för meteoriterna.

## 3.8

**När man borrar i berg använder man en särskild sorts borrspets. Antalet hål som kan borras med en spets betecknar vi X. Tätheten för X alltså f(x) ges av följande:**

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.02 | 0.03 | 0.05 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.07 | ? |

**a) Vad är f(8)?**

**b) Hitta tabell för F.**

**c) använd F för att hitta sannolikheten att en slumpvis vald borr kan användas till mellan 3 och 5 hål?**

**d) Hitta P[X=<4] och P[X<4] är dessa sannolikheter lika?**

**e) Hitta F(-3) och F(10).**

a) Vi vet att

$$\sum_{x=1}^{8} f(x) = 1$$

Detta ger att

$$\underbrace{0.02 + 0.03 + 0.05}_{0.1} + \underbrace{0.2 + 0.4 + 0.2}_{0.8} + 0.07 + ? = 1$$

$$\underbrace{0.1 + 0.8 + 0.07}_{0.97} + ? = 1$$

$$0.97 + ? = 1$$

$$\underline{\underline{? = 0.03}}$$

b)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\tilde{x}=1}^{x} f(\tilde{x})$$

Den kumultiva fördelnings funktionen fås genom att summera alla tal under X.

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.02 | 0.03 | 0.05 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.07 | 0.03 |
| F(x) | 0.02 | 0.05 | 0.1 | 0.3 | 0.7 | 0.9 | 0.97 | 1.00 |

c) Sannolikheten att hamna mellan 3 och 5 kan skrivas som

$$P(3 \le X \le 5) = P(2 < X \le 5) = F(5) - F(2) =$$
$$= 0.7 - 0.05 = 0.65$$

d) Nej dessa är inte lika.

$P[X \le 4] = F(4) = 0.3$ (1, 2, 3, 4)

$P[X < 4] = F(3) = 0.1$ (1, 2, 3)

e)

$F(-3) = 0$ ty $X$ alltid $\ge 0$

$F(10) = 1$ ty $X$ alltid $\le 8$

**3.10**

**Det är känt att sannolikheten att kunna logga in på en dator remote vid en given tid är 0.7. Låt X beteckna antalet försök som måste göras för att komma åt datorn.**

**a)hitta de 4 första termerna i täthetstabellen**

$f(1) = 0.7$ – funkar första

$f(2) = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$ – inte första men andra

$f(3) = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.063$ osv.

$f(4) = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 0.0189$

**b)ge ett slutet uttryck för f(x)**

$f(x) = 0.3^{x-1} \cdot 0.7$ ← ett lyckat

↑

x-1

misslyckande

**c) Hitta P[X = 6].**

$f(6) = 0.3^{6-1} \cdot 0.7 = 0.001701$

**d) Hitta en sluten form för F(x).**

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^{x} f(k) = \sum_{k=1}^{x} f(k) = \sum_{k=1}^{x} 0.3^{k-1} \cdot 0.7 =$$

$$= 0.7 \sum_{k=0}^{x-1} 0.3^k = \{\text{geometrisk Summa}\} = \cancel{0.7} \cdot \frac{1-0.3^x}{\cancel{1-0.3}} = 1-0.3^x$$

**e)Använd F för att hitta sannolikheten att som mest 4 försök måste användas för att logga in.**

$P(X \leq 4) = F(4) = 1 - 0.3^4 = \underline{0.9919}$

**f) Använd F för att hitta sannolikheten att minst 5 försök behövs.**

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0.9919 =$

$= \underline{0.0081}$

**3.14**

**I ett experiment testade man att ympa en typ av apelsin träd på rötterna av ett annat. En serie med 5 försök gjordes. Låt tätheten för X=#inympnigar som misslyckades ges av:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| f(x) | 0.7 | 0.2 | 0.05 | 0.03 | 0.01 | ? |

**a) hitta E[X].**

$$? = 1 - 0.7 - 0.2 - 0.05 - 0.03 - 0.01 = 0.01$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{5} x f(x) = 0 \cdot 0.7 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.05 + 3 \cdot 0.03 + 4 \cdot 0.01 + 5 \cdot 0.01 = \underline{0.48}$$

Summera för alla möjlig x viktat med sannolikheten täthetsfunktionen.

**b) Hitta** $\mu_X$

$$\mu_X = 0.48$$

$\mu_X$ är bara en alternativ beteckning för $E(X)$

**c) Hitta E[X^2].**

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{5} x^2 f(x) = 0^2 \cdot 0.7 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.05 + 3^2 \cdot 0.01 + 5^2 \cdot 0.01 =$$

$$= 1.08$$

$$\boxed{E(H(x)) = \sum_{x} H(x) f(x)}$$

**d) hitta Var(X)**

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1.08 - 0.48^2 = \underline{\underline{0.8496}}$

**e) hitta sigmakvadrat.**

$\sigma_x^2 = Var(x) = \underline{\underline{0.8496}}$

$\sigma_x^2$ är bara en alternativ beteckning för $Var(X)$

**f)hitta standardavvikelsen för X.**

$\sigma_x = \sqrt{var(x)} = \sqrt{0.8496} = \underline{\underline{0.9217}}$

g) vilen enhet har sigma_x

Samma som $X$!

"Antal"

3.24

(slumpmässigt)

När man borrar efter olja är sannolikheten 1/13 att hitta olja. Antag att en grupp borrar efter olja i olika delar av landet. Så att ett borrhål inte har med något annat att göra. Låt X vara antalet försök som behövs innan man hittar olja.

a) verifiera att X är geometriskt fördelad och hitta parametern p.

1. Exprimentet består i en serie försök där utfallet antingen är "lyckas" (s) eller "misslyckas" (f)

2. Försöken är identiska och oberoende och sannolikheten att lyckas, p, är samma för alla försök.

3.
X = # försök som behövs innan första lyckas.

I vårt fall är $p = \frac{1}{13}$

X = # borrningar innan man hittar olja.

"Hittar olja" (s) "hittar inte olja" (f)

b) Vad är det exakta uttrycket för tätheten hos X?

$$f(x) = (1-p)^{x-1} p, \quad p = \frac{1}{13}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

c) Vad är det exakta uttrycket för den moment genererande funktionen för X?

$X \sim geom(p) \Rightarrow m_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$, $q = 1-p$

(se tabell 3.8) $p = \frac{1}{13}$

**d) Vad är väderna på E[X], E[X^2],sigma^2, sigma?**

Dessa kan fås från den moment genererande funktionen.

$$E(x) = \frac{dm_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{pe^t(1-qe^t) - pe^t(-qe^t)}{(1-qe^t)^2} = \{t=0\} =$$

$$= \frac{p(1-q) - p(-q)}{(1-q)^2} = \frac{p - \cancel{pq} + \cancel{pq}}{1^2 - 2q + q^2} = \frac{p}{1-2q+q^2} = \left( = \frac{p}{(1-q)^2} = 1/p \right)$$

$$= \frac{1/13}{1 - 24/13 + 12^2/13^2} = \frac{1/13}{\frac{12^2}{13^2} - \frac{11}{13}} = \underline{\underline{13}}$$

Finns också en sats för $\mu$ hos geometrisk fördelning $\underline{\mu = \frac{1}{p}}$ (Enklare)

$$Var(X) = \sigma^2 = \left\{ \begin{matrix} \text{Sats för} \\ \text{geom. förd} \end{matrix} \right\} =$$ (se theorem 3.4.3)

$$= \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{12}{13}}{(1/13)^2} = \frac{12/13}{1/13^2} = 12 \cdot 13 = \underline{\underline{156}}$$

Låt oss hitta $E(X^2)$.

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X)^2 + Var(X) = E(X^2) = 13^2 + 156 = \underline{\underline{325}}$$

$$\sigma = \sqrt{var(X)} \approx \underline{12.49}\ldots$$

**e) Hitta P[X>=2].**

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=1) = 1 - f(1) = 1 - \frac{1}{13} = \underline{\underline{\frac{12}{13}}}$$

D.v.s sannolikheten att misslyckas vid första försöket.

3.28

**Ett system använder 128-bits per meddelande som sänds. Ibland fås störningar så att en bit ändras vilket orsakar ett överförnings fel detta händer** med sannolikhet 1/1000 för varje enskild bit.

**Låt X=#överförningsfel per 128-bits som sänds.**

**Är X geometrisk? Om inte vilken egenskap saknas?**

1. Experimentet består av en serie försök. Ok!

2. Försöken är identiska och oberoende.

3. Inte OK

$X \neq$ # försök som behövs innan första lyckas.

Antalet överföringar i det här fallet är inte beroende om det lyckas eller inte.

(*) $X$ är binomialfördelad med $n = 128$ och $p = 1/1000$ vilket inte är samma som geometrisk.

**3.32**

**En diskret randomiserad variabel har momentet genererande funktionen**

**m_x(t) = exp(2(exp(t)-1))**

**a) Hitta E[X].**

$$E(X) = \frac{d\, m_x(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(e^{2(e^t-1)}\right)\Big|_{t=0} = 2\cdot(e^t)\cdot e^{2(e^t-1)}\Big|_{t=0} =$$

$$= 2\cdot e^0 e^{2(e^0-1)} = 2\cdot e^{2\cdot 0} = \underline{\underline{2}}$$

**b)Hitta E[X^2]**

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dx^2} m_X(t) = \frac{d}{dt}\, 2\cdot e^t \cdot e^{2(e^t-1)} = \frac{d}{dt}\, 2e^{2(e^t-1+t/2)} =$$

$$= 4e^{2(e^t+t/2-1)}(e^t+1/2) = 4e^{2(e^0+0-1)} + 2e^{2(e^t+t/2-1)}$$

$\underline{\underline{t=0}}$ $\quad E(X^2) = m''_X(0) =$

$$= 4e^{2\cdot 0} + 2e^{2\cdot 0} = 4+2 = \underline{\underline{6}}$$

**c) Hitta sigma^2 och sigma**

$$\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\sigma^2 = 6 - 2^2 = 6-4 = \underline{\underline{2}}$$

$$\sigma = \sqrt{2}$$

**3.40**

**I ett elektronmikroskop fås bilder av föremålet man studerar på ett katodisktstrål-rör. Förr har man använt en 4x5 tums kamera. Men man tror att en 35 mm kamera kan ge samma resultat.**

**a) man fotar 15 olika föremål med båda kamerorna och utvärderar bilderna genom att låta en bedömare välja den skarpaste av en bild från varje kamera. Låt X vara antalet bilder valda från den nya kameran. Vad skulle väntevärdet på X vara om det inte är någon skillnad på bilderna?**

vänte värdet - $E[X]$

Om det inte var någon skilnad skulle sannolikheten vara 0.5 att en bild väljs.

$15 \cdot 0.5 = \underline{\underline{7.5}}$ $\qquad E[X] = 7.5$

**b) Skulle du bli förvånad om bedömaren valde 12 eller mer från den nya kameran? Vilka sannolikheter är inblandade?**

Låt oss kolla sannolikheten för detta om biderna är lika.

$P(X \geq 12)$?

$X$ här är binomial fördelad med parametrar $n=15$, $p=0.5$.

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12) = 1 - P(X \leq 11) =$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{11} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1 - \sum_{x=0}^{11} \binom{15}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = 1 - 0.9824 =$$

$= \underline{\underline{0.0176}}$ d.v.s. Ja jag skulle bli lite förvånad. men endå inte helt omöjligt.

**c) Om X >= 12 finns det anledning att tro att bedömaren inte väljer slumpmässigt?**

Ja eftersom sannolikheten för dett är
< 2% så ja det låter mycket möjligt.

**3.48**

**Nu** blir **det baseball. En kastmaskin kastar bollen i strike zone för en 180 cm lång spelare 90% av gångerna.**

**Vad är förväntat antal kast tills fyra bollar missat strike zone?**

$X$ = tot antal försök tills 4 lyckade

$X$ här är negativt binomial fördelad med parametrar.

$r = 4$, $p = 0.1$

för neg. binomial gäller.

$$f_X(x) = \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r$$

På hur många sätt kan det hända

strike $x-r$ ggr.

miss $r$ ggr.

Väntevärde för neg. Bin.

$$E[X] = \frac{r}{p} = \frac{4}{0.1} = \underline{\underline{40}}$$

Vad är sannolikheten att fjärde missen sker på sjunde kastet?

$$P(X=7) = f_X(7) = \binom{6}{3} 0.9^3 \cdot 0.1^4 = 20 \cdot 0.729 \cdot 0.0001 =$$

$$= 0.001458 \approx \underline{0.15\%}$$

3.54

**Antag att X är hypergemoetriskt fördelad med N=20 , r=17 och n=5**

**Vad är de möjliga värdena för X?**

Hypergeometrisk fördelning kan tänkas på som N objet där r har en viss egenskap. Vi drar n av objekten och

$X = \#$ object med egenskapen.

Då blir det enklare att se.

$$\underbrace{\max(0, n-(N-r))}_{\text{om det är färre utan egenskapen } (N-r) \text{ än vi drar } n} \leq X \leq \min(n, r)$$

dvs $2 \leq X \leq 5$

**Vad är E[X]?**

Väntevärde för hypergeometrisk fördelning fås som.

(se tabell 3.8)

$$E[X] = n \frac{r}{N} = 5 \frac{17}{20} = \underline{\underline{\frac{17}{4}}}$$

antal vi drar

andel med egenskapen

**Vad är var(X)?**

Variansen för en geometrisk fördelning fås som

$$Var(X) = n \frac{r}{N} \left(\frac{N-r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 5 \frac{17}{20} \cdot \frac{3}{20} \cdot \frac{15}{19} = \underline{\underline{0.503}}$$

**3.62**

**Ett visst kärnkraftverk släpper ut radioaktiva gaser 2 ggr/månaden i genomsnitt.**

**Hitta sannolikheten att det är högst 4 utsläpp på en månad.**

Detta kan ses som en Poisson fördelning(*)

$X$ = # utsläpp på en månad.

$X \sim Poison(k)$ $\quad k = 2$

$$P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-k} k^x}{x!} = e^{-k} \sum_{x=0}^{4} \frac{k^x}{x!} = e^{-2}\left(2^0 + 2^1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right)$$

$$= e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24}\right) = 0.947$$

**Vad är det förväntade utsläppen under 3 månader?** (**)

$X'$ = # utsläpp under 3 månader.

$X' \sim Poi(3 \cdot 2) = Poi(6)$

Väntevärde för poisson fördelning ger.

$E(X') = 6$

(*) Det är det boken menar om än med något oklar argumentering/bakgrund.

(**) Det författarna tänker sig här är att antalet utsläpp under n månader är en Poisson process med 2 utsläpp per månad i medel dvs 6 utsläpp i medel under 3 månader

**12 eller mer utsläpp observeras under 3 månader. Bör vi misstänka det rapporterade genomsnittet?** (***)

Vi söker alltså

$$P(X' \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 1 - e^{-6} \sum_{x=0}^{11} \frac{6^x}{x!} =$$

$$= \ldots = 0{,}02$$

Sannolikheten för detta är 2%
alltså ganska liten. Dvs Ja vi bör
misstänka det rapporterade genomsnittet.

(***) En poisson process med 2 utsläpp per
månad i medel har ett Po(6)-fordelat antal
utsläpp efter 3 månader.

Poissonprocessen förklaras/definieras
mera noggrannt i kapitel 4 i boken och
ännu mera noggrannt i de föreläsnings-
anteckningar och den föreläsning som
hör där till.

3.64

**Califonien slås av ca. 500 jordbävningar som kan märkas av per år. De som har möjlighet att förstöra kommer dock bara med medel en gång per år.**

**Hitta sannolikheten att** minst **en sådan jordbävning slår under en 6 månaders period.** (*)

$X$ = # Jordbävningar under 6 månader

$X \sim Poi(0.5)$ Poison fördelad med $k = \lambda s = 1 \cdot 0.5 = 0.5$

---

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!} = 1 - 0.607 = 0.393$$

**Skulle det vara ovanligt att ha 3 eller mer jordbävningar av destruktiv magnitud under en 6 månaders period.**

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) =$$

$$= 1 - e^{-0.5}\left(1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2}\right) = 1 - e^{-0.5}(1.625) =$$

$$= 1 - 0.9856 = 0.01438\ldots \approx \underline{\underline{0.014}}$$

Ja ganska ovanligt $\underline{1,4\%}$

(*) Jordbävningarna som har möjlighet förstöra tänks vara en Poisson process med en jordbävning per år i medel varvid antalet jordbävningar under 6 månader blir $Po(0.5)$-fördelat.

3.68

**En poisson fördelad slumpvariabel är sådan att P(X=0) = P(X=1). Hitta k.**

Täthetenför poissonfördelning ger oss att

$$P(X=0) = \frac{e^{-k}k^0}{0!}$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-k}k^1}{1!}$$

$$\frac{e^{-k}k^0}{0!} = \frac{e^{-k}k^1}{1!}$$

$$e^{-k} = e^{-k}k$$

$$\underline{\underline{k=1}}$$