Kapitel 4

4.4

En del av platsen i skrotbilar kan rivas ut och återanvändas. Låt X beteckna mängden plats som kan återanvändas i en bil. Antag att tätheten för X ges av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x}, & 25 \leq x \leq 50 \\ 0, & x \notin [25, 50] \end{cases}$$

a) Verifiera att f är en täthet för en kontinuerlig slumpvariabel.

1. $f(x) \geqslant 0$ ok!

2. Är $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$?

Vi får kolla.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{25}^{50} \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln 2} \left[\ln x\right]_{25}^{50} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (\ln 50 - \ln 25) = \frac{1}{\ln 2} \ln(50/25) =$$

$$= \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1 \text{ ok}$$

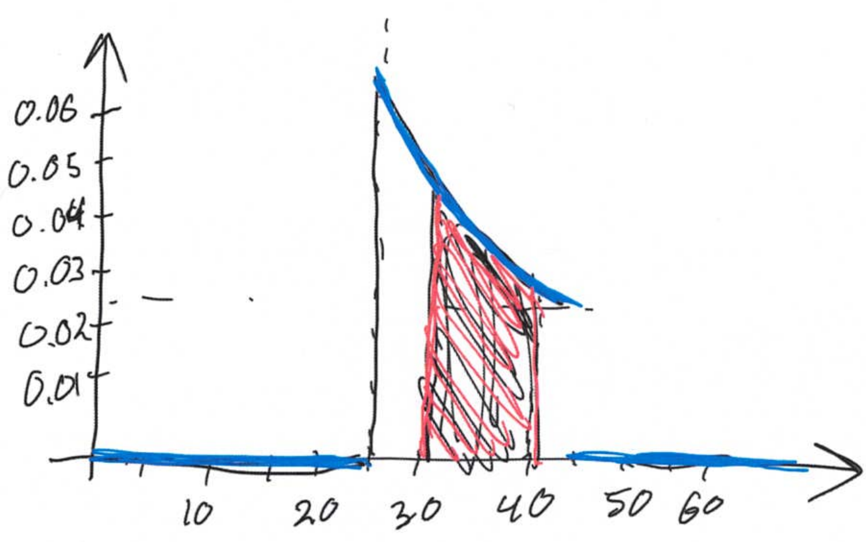
b) Hitta sannolikheten att en slumpmässigt vald bil innehåller mellan 30 och 40 punds plast.

Intigrera över det sökta området.

$$P(30 \leq X \leq 40) = \int_{30}^{40} f(x)\,dx = \frac{1}{\ln 2} \int_{30}^{40} \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (\ln 40 - \ln 30) = \frac{\ln 4/3}{\ln 2} = \underline{0.415}$$

c) skissa täthetsfunktionen och rita in sannolikheten från b).



4.10

Hitta den kumulativa fördelnings funktionen för en s.v. X, som är likformigt fördelad på intervallet (a,b).

Hitta den kumultiva fördelnings funktionen för en SV X, som är likformigt fördelad på intervallet (a,b) $a<b$

Täthetsfunktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

Kumultiv fördelnings funktion:

$F(x) = P(X \leq x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \leq a & (1) \\ \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt, & a<x<b & (2) \\ 1 & x \geq b & (3) \end{cases}$$

För (2)

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \underline{\underline{\frac{x-a}{b-a}}}$$

4.16

Låt X vara mängden plast i en skrotbil.

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} \quad 25 \leq x \leq 50$$

Hitta väntevärde, varians och standardavvikelse för X.

Väntevärde:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{25}^{50} x \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \int_{25}^{50} \frac{1}{\ln 2}\,dx = \frac{25}{\ln 2}$$

Varians:

Behöver $E(X^2)$

$$E(X^2) = \int_{25}^{50} x^2 f(x)\,dx = \int_{25}^{50} x^2 \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \int_{25}^{50} x\,dx = \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{25}^{50} = \frac{1}{2\ln 2} (50^2 - 25^2) =$$

$$= \frac{1875}{2\ln 2}$$

$$E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1875}{2\ln 2} - \left(\frac{25}{\ln 2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1875}{2\ln 2} - \frac{25^2}{\ln 2^2} = 51,67$$

Standardavvikelse

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(x)} = \sqrt{51,67} = \underline{\underline{7,19}}$$

4.18

Tätheten för en slumpvariabel X som är likformigt fördelad på (a,b) är

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Använd def. 4.2.1

dvs.

$$E[H(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) f(x)\, dx$$

Visa att

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

och

$$Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

<u>Väntevärde:</u>

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{1}{2}(b^2-a^2) =$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{a+b}{2} \quad V.S.V$$

någon kvadrerings regel

<u>Varians:</u>

Behöver $E[X^2]$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{3(b-a)} (b^3 - a^3)$$

<u>sätt ihop</u>

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = \ldots = \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{12} = \underline{\underline{\frac{(b-a)^2}{12}}}$$

4.24

Antag att den ökade efter frågan på el under kommande 2-årsperiod är en slumpvariabel X, med täthet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{64}x^3 & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) Verifiera att detta är en täthet

$f(x) \geq 0$ ok!

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{64}\int_0^4 x^3\,dx = \frac{1}{64}\cdot\frac{4^4}{4} = \frac{1}{64}\,64 = 1 \text{ ok!}$$

b) Hitta uttrycket för F(x), den kumulativa fördelningsfunktionen.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x f(t)\,dt, & 0 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

För $x \in (0,4)$

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{64}t^3\,dt = \frac{1}{64}\frac{x^4}{4} = \underline{\frac{x^4}{256}}$$

Finn $P(X \leq 2)$.

$$P(X \leq 2) = F(2)$$

$$= \frac{2^4}{256} = \frac{16}{256} = \frac{1}{16}$$

c) om det i ett visst område går att öka produktionen med högst 3 MWH, vad är sannolikheten att efterfrågan kommer överskrida tillgången?

$$P(X>3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{1}{256} 3^4 = \frac{175}{256} =$$

$$= 0.68$$

d) Hitta väntevärdet av ökningen.

$$E(X) = \frac{1}{64} \int_0^4 x \cdot x^3 dx = \frac{1}{64} \int_0^4 x^4 dx = \frac{1}{64} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{1}{4^3} \cdot \frac{4^5}{5} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5} = \underline{\underline{3.2}}$$

4.30

Låt X vara en gamma-fördelad slumpvariabel med parametrar "alpha" och "beta". Använd moment genererande funktionen för att hitta E[x] och E[x^2] samt Var(X).

$X \sim Gamma(\alpha, \beta)$

$m_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$ (se tabell 4.1)

Vi vet att:

$E(X^k) = \frac{d^k}{dt^k} m_X(t) \Big|_{t=0}$

Deriverar en gång:

$\frac{d}{dt}(1-\beta t)^{-\alpha} = -\alpha(1-\beta t)^{-(\alpha+1)} \cdot (-\beta) = \alpha\beta(1-\beta t)^{-(\alpha+1)}$

$\Rightarrow E(X) = \alpha\beta(1-\beta t)^{-(\alpha+1)} \Big|_{t=0} = \alpha\beta$

Deriverar en gång till:

$\frac{d^2}{dt^2} m_X(t) = \frac{d}{dt} \alpha\beta(1-\beta t)^{-(\alpha+1)} =$

$= -\alpha\beta(\alpha+1)(1-\beta t)^{-(\alpha+2)} \cdot (-\beta) =$

$= \alpha\beta^2(\alpha+1)(1-\beta t)^{-(\alpha+2)}$

$\Rightarrow E(X^2) = \alpha\beta^2(\alpha+1)(1-\beta t)^{-(\alpha+2)} \Big|_{t=0} =$

$$= \alpha \beta^2 (\alpha + 1) = \alpha^2 \beta^2 + \alpha \beta^2$$

$$\operatorname{Var} X = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha^2 \beta^2 + \alpha \beta^2 - (\alpha \beta)^2 =$$

$$= \underline{\underline{\alpha \beta^2}}$$

4.34

Antag att ett kärnkraftverk släpper ut radioaktiva gaser i genomsnitt 2 ggr/ månad. Hitta sannolikheten att det tar tar minst 3 månader innan första utsläppet. Vad är medeltiden man måste vänta innan första utsläppet.

X = # utsläpp under 3 mån $\sim Poi(k)$ (*)

där $k = \lambda \cdot s = 2 \cdot 3 = 6$

Söker

$$P(X=0) = \frac{k^0}{0!}e^{-k} = e^{-6} = \underline{0.00248}$$

Detta är sannolikheten att det tar minst 3 månader innan första utsläppet.

X poisson fördelad betyder att tiden mellan varje händelse är exponential fördelad. $\sim Exp(2)$

$$E(Exp(2)) = \frac{1}{2}$$

$\Longrightarrow$

I medel måste man vänta en halv månad.

(*) Man antager att tidsförloppet med konsekutiva utsläpp av radioaktiva gaser/händelser är en Poisson process.

4.36

Oljud i en gruva uppstår i genomsnitt 3 ggr/timme. Hitta sannolikheten att inget oljud uppstår under en 30 minuters period.

oljud/timme $\sim$ Poison (3) (*)

Notera att det även gäller att

Tiden mellan två oljud är exponential fördelad med parameter $\beta = 1/3$

X = väntetid till nästa oljud

$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = 3e^{-3x} \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-3x}$ för $x \geq 0$

$30 \text{ min} = 0.5 h$

$\Rightarrow$

$P(X > 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - (1 - e^{-3 \cdot 0.5}) =$

$= e^{-3/2}$

(*) Det antages att tidsförloppet av konsekutiva förekomster av oljud i gruvan är en Poisson process.

Alternativt

X = # oljud under 30 min $\sim Poi(3/2)$

$P(X = 0) = \frac{(3/2)^0}{0!} e^{-3/2} = \underline{\underline{e^{-3/2}}}$

4.40

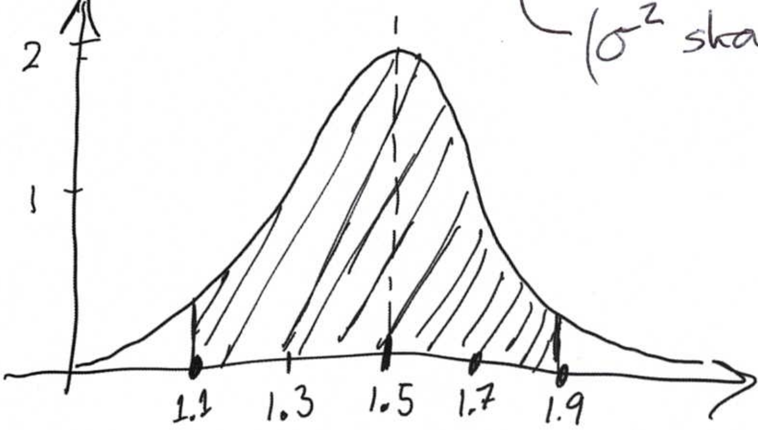
Låt X = densiteten för en viss typ av lera. Studier visar att X är normalfördelad med medel 1.5 och standardavvikelse 0.2

a) Vad är tätheten för X? Skissa tätheten och markera sannolikheten att 1.1 < X < 1.9. Hitta sannolikheten.

X = densiteten för en viss typ av lera.

$X \sim normal(1.5, 0.2^2)$

(σ^2 skall stå där!)



Räkna ut denna sannolikhet.

$$P(1,1 \le X \le 1.9) = P(-0.4 \le X - 1.5 \le 0.4) =$$

$$= P\left(-2 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 2\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le 2\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le -2\right) =$$

$$= F_Z(2) - F_Z(-2) = 2F_Z(2) - 1$$

$$= \left\{\underset{V}{tabell}\right\} = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0,9544$$

Skriver alltså på denna standard form norm(0,1) för att sedan kunna slå upp i tabell värde och Z är en normal(0,1) stokastisk variabel.

b) Finn sannolikheten att X är mindre än 0.9.

$$P(X<0.9) = P(X \leq 0.9) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0.9-1.5}{0.2}\right)$$

$$= P(\text{normal}(0,1) \leq -3) \overset{\text{tabell V}}{=} 0.0013$$

c) Skulle du bli förvånad om ett X-värde större än 2 observerades?

$$P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2-1.5}{0.2}\right)$$

$$= 1 - P(\text{normal}(0,1) \leq 2.5) \overset{\text{tabell V}}{=} 1 - 0.9938$$

är förvånande ty sannolikheten för det (om modellen är riktig) är ca. 0.6 %.

d) För vilket x är $P(X \geq x) = 0.1$?

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-1.5}{0.2}\right) = 1 - P\left(\text{normal}(0,1) \leq \frac{x-1.5}{0.2}\right)$$

$$= 0.1 \overset{\text{tabell V}}{\Longrightarrow} \frac{x-1.5}{0.2} = 1.28 \Rightarrow x = 1.5 + 0.2 \cdot 1.28$$

$$= 1.756$$

e) Vad är momentgenererande funktionen för X?

Enligt tabell 4.1 är

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} = e^{1.5 \cdot t + 0.02 \cdot t^2}$$

4.50

För en normalfördelad slumpvariabel är

$$P(|X-\mu| < 3\cdot\sigma) \approx 0.997$$

Vilket värde får Chebyshevs olikhet?

chebyshevs:

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

I vårt fall

$$P(|X-\mu| < 3\sigma) \geq 1-\frac{1}{9} = 0.89$$

Är dessa resultat konsistenta?

Ja $0.89 < 0.997$ så chebyshev motsäger inte tumregeln.

Vilket resultat är strarkast?

En något märklig fråga, eller? I vilket fall är normalregeln starkare i meningen att den är exakt för normalfördelningar medan Chebysjebv olikhet är starkare i meningen att den gäller för alla fördelningar.

4.54

En kemisk reaktion körs med en vanlig produktion på 70%. En ny process har hittats som ska öka produktionen. Förespråkarna för den nya processen hävdar att den ska ge högre produktion mer än 90% av gångerna. Den nya processen testas 60 gånger. Låt X beteckna antalet gånger där produktion överskrider 70%.

a) om sannolikheten för en ökad produktion är 0.9 är normal approximation rimligt?

$X \sim \text{Binomial}(60, 0.9)$, $p = 0.9$, $n = 60$

Normal approximation kan göras om $n \min(p, 1-p) > 5$.

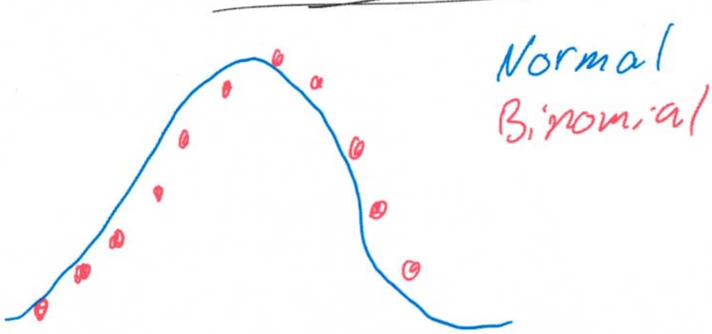
Här har vi att

$n \min(p, 1-p) = 60 \cdot 0.1 = 6 > 5$.

Det blir alltså en god approximation

ungefär $\text{Normal}(n \cdot p, n \cdot p(1-p)) =$

$= \text{Normal}(54, 5{,}4)$



b) om p=0.9 vad bli då väntevärdet för X?

$X \sim Bin(60, 0{,}9)$

$E(X) = 60 \cdot 0{,}9 = \underline{\underline{54}}$

c) om p>0.9 som påstås borde testet resultera i mer än 54 oftast. Låt oss säga att vi accepterar påståendet om X åtminstonde 59. Vad är då sannolikheten att vi accepterar påståendet om p = 0.9?

$P(X \geq 59) = \sum_{x=59}^{60} \binom{60}{x} 0.9^x (1-0.9)^{60-x} =$

$= 60 \cdot 0.9^{59} \cdot 0.1^1 + 1 \cdot 0.9^{60} \approx 0.01378 \approx 1{,}4\%$

Altså väldigt lågt om $p = 0.9$

d) vad är sannolikheten att vi inte accepterar påståendet (X=<58) om p=0.95?

$P(X \leq 58) = 1 - P(X \geq 59) =$

Nu gör vi samma som ovan med $p = 0.95$

$= 1 - \sum_{x=59}^{60} \binom{60}{x} 0.95^x (1-0.95)^{60-x} =$

$= 1 - 60 \cdot 0.95^{59} \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.95^{60} = 1 - 0.1915.. \approx$

≈ 0.81

Altså ca. 80% att vi inte accepterar med $p = 0.95$ och kravet $(X \geq 59)$.

4.60 En stokastisk variabel X är Weibull-fördelad med $\alpha = 0.04$ och $\beta = 2$.

a) Finn frekvensfunktionen, väntevärdet och variansen för X.

Lösning Se tabell 4.1.

b) Finn överlevnadsfunktionen för X.

Lösning $R_X(x) = 1 - F_X(x) = e^{-\alpha x^\beta}$

c) Vad är $R_X(5)$ och $R_X(10)$?

Svar 0.368 resp. 0.018

d) Ange felintensiteten.

Lösning $p(t) = f(t)/R(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1}$

e) Ange felintensiteten för $t = 5$ och $t = 10$.

Svar. 0.4 resp. 0.8

f) Finn $P(X \leq 3)$.

Lösning $P(X \leq 3) = 1 - R_X(3) = 1 - e^{-\alpha \cdot 3^\beta} = 0.302$

4.64

Betrakta felintensiteten

$$p(t) = \alpha \beta t^{\beta - 1}$$

a) Visa att felintensiteten är konstant om beta = 1

$$p(t) = \alpha \cdot 1 \, t^{1-1} = \alpha t^0 = \alpha \quad \Rightarrow \text{konstant}$$

b) Hitta

$p'(t)$

och visa att

$$p'(t) > 0 \iff \beta > 1$$
$$p'(t) < 0 \iff \beta < 1$$

$$p'(t) = (\beta - 1) \alpha \beta t^{\beta - 2}$$

$$\alpha, \beta, t > 0 \implies \alpha \beta t^{\beta - 2} > 0$$

$$\beta - 1 > 0 \iff \beta > 1$$
$$\beta - 1 < 0 \iff \beta < 1$$

4.66

Ett system består av två oberoende serie kopplade komponenter.

Livstiden för den första följer weibullfördelning med alpha = 0.006 och beta = 0.5.

Den andra följer en exponentialfördelning med beta = 25000 (*)

a) Hitta R(2500) sannolikheten att systemet fungerar efter 2500 h

För ett serie kopplat system

P(system fungerar) = P(komp. 1 fungerar) · P(komp. 2 fungerar)

$$R_{sys}(t) = R_1(t) \cdot R_2(t)$$

R - "reliabiliti"

$$R_1 = \begin{Bmatrix} \text{Tidigare} \\ \text{upgift} \end{Bmatrix} = e^{-\alpha t^{\beta}} = e^{0.006\sqrt{t}}$$

$$R_2 = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{t/25000}) = e^{-t \cdot 0.00004}$$

$$R_{sys} = R_1 \cdot R_2 = e^{-0.006\sqrt{t} - 0.00004t}$$

$$R_{sys}(2500) = 0.67$$

b) vad är sannolikhetenatt systemet slutar fungera innan 2000 h?

$$1 - R_{sys}(2000) = 1 - e^{-(0.006 \cdot \sqrt{2000} + 2/25)} = 0.29$$

(*) Detta är ej vad som står i boken men högst troligen vad författarna verkligen menar.

c) om komponenterna är parallell kopplade vad är sannolikheten att den fungerar efter 2500 h?

$$R_{sys} = 1 - P(\text{Alla är trasiga}) =$$

$$= 1 - (1-R_1)(1-R_2)$$

$$R_{sys}(2500) = 1 - (1 - e^{-0.006\sqrt{2500}})(1 - e^{-\frac{2500}{25000}}) =$$

$$= \underline{\underline{0.975}}$$

4.68

Tre oberoende komponenter används i ett system, var och en fungerar med sannolikhet 0.9.

a) systemet fungerar om minst en fungerar. Vad är sannolikheten att systemet fungerar?

$P(\text{fungerar}) = P(\text{minst 1 fungerar}) =$

$= 1 - P(\text{alla trasiga}) = 1 - 0.1^3 = 1 - 10^{-3} = \underline{\underline{0.999}}$

b) om systemet fungerardå minst två fungerar

$X = \#$ som fungerar

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$

$P(X = 3) = 0.9^3$

$P(X = 2) = \binom{3}{2} 0.9^2 \cdot 0.1 = 3 \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.3 \cdot 0.9^2$

$P(X \geq 2) = 0.9^3 + 0.3 \cdot 0.9^2 = \underline{0.972}$

c) fungerar om alla fungerar

$P(\text{fungerar}) = 0.9^3 = 0{,}729$

4.70

Låt X vara s.v. med

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & , \ 0 \le x \le \sqrt{8} \\ 0 & , \ \text{annars} \end{cases}$$

och låt $Y = X + 3$

a) Hitta $E[X]$ och använd det för att hitta $E[Y]$.

$$E[X] = \int_0^{\sqrt{8}} x \, \frac{x}{4} \, dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{12} 8^{3/2}$$

$$E[Y] = E[X+3] = E[X] + 3 = \underline{\underline{\frac{8^{3/2}}{12} + 3}}$$

b) Hitta tätheten för Y.

$$Y = g(X), \quad g(X) = X + 3$$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} \right|$$

Vi har $g^{-1}(Y) = Y - 3$

$$\frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} = 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y-3) \cdot 1 = \frac{1}{4}(y-3), & 3 \le y \le \sqrt{8}+3 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

c) Använd detta för att hitta väntevärde för Y.

$$E[Y] = \int_3^{\sqrt{8}+3} y \frac{1}{4}(y-3)\, dy = \frac{1}{4} \int_3^{\sqrt{8}+3} (y^2 - 3y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{3y^2}{2}\right]_3^{\sqrt{8}+3} = \frac{1}{4}\left(\frac{(\sqrt{8}+3)^3}{3} - \frac{3}{2}(\sqrt{8}+3)^2 - \frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 9}{2}\right) =$$

$$= \ldots\ldots = \frac{8^{3/2}}{12} + 3$$

Alltså samma som i a) :-)