MVE090 LP4 2021 Föreläsning 1-2

Författare: examinator Patrik Albin (=jag)

MVE090 är en traditionell grundkurs i matematisk statistik bestående av drygt hälften sannolikhetsteori (föreläsning 1-8 = kapitel 1-5 i kursboken) och knappt hälften statistikteori (föreläsning 9-14 = kapitel 6-11 i kursboken). Sannolikhetsteorin är lättare med goda matteförkunskaper och vice versa medan statistikteorin är mindre matterelaterad.

All information man behöver om kursen skall finnas tillgänglig via kurshemsidan

`https://chalmers.instructure.com/courses/13348`

Matematisk statistik är en del av matematikämnet. Liksom med "vanliga" mattekurser är det mycket olämpligt spara arbetet med kursen till kort innan tentan utan istället bör man redan från kursstart jobba på ett "hederligt sätt" med övningsuppgifter.

Kursboken Milton & Arnold (=M&A) är en väletablerad kursbok. Som många amerikanska kursböcker är den lite "pratig". Också har författarna valt använda förhållandevis "verkliga siffror" i bokens exempel och övningar.

Engelska är det naturliga språket för matematisk statistik. Då fackord översättes till svenska är detta inte alltid entydigt. I sådana fall försöker jag presentera alternativen vid första förekomsten men fortsätter därefter med det alternativ jag själv förderar.

Kapitel 1. "Introduction to Probability and Counting"

Sannolikhetsteori använder sig av de grundläggande begreppen i mängdlära. Se tex.

`https://www.matteboken.se/lektioner/matte-5/mangdlara`

Man utför ett slumpmässigt experiment. Som tex. kasta en tärning.

Mängden av alla möjliga utfall av experimentet kallas utfallsrummet S. Tex. är $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ för kast med en tärning.

En delmängd $A \subseteq S$ av utfallsrummet kallas händelse. Tex. är resultatet att tärningen visar mindre lika 3 vid tärningskast händelsen $A = \{1, 2, 3\} \subseteq S$.

Ett sannolikhetsmått $\mathbf{P}(\cdot)$ tilldelar sannolikheter $\mathbf{P}(A)$ åt händelser $A \subseteq S$.

Definition 1.1. (Klassiska sannolikhetsformeln) Om alla utfall är lika sannolika är

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{\text{antalet utfall i } A}{\text{antalet utfall i } S} \quad \text{för } A \subseteq S.$$

Tex. är

$$\mathbf{P}(\text{tärningen visar mindre lika 3}) = \mathbf{P}(\{1,2,3\}) = \frac{\#\{1,2,3\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6}.$$

Resten av detta kapitel handlar om sk. kombinatorik som är hjälpmedel för kunna räkna ut $\#A$ och $\#S$ i klassiska sannolikhetsformeln i de många fall det är mera komplicerat än tex. i fallet med kast av tärning ovan. Kombinatorik kan vara svårt och även lärare gör fel på det ibland. Själv kompletterar jag vanligen kombinatoriska uträkningar med datorsimuleringar för dubbelkontroll, tex. då jag gör tentamenstal.

En permutation är ett arrangemang av objekt i en viss ordning. Tex. de sex möjliga tärningsutfallen i avtagande ordning $6, 5, 4, 3, 2, 1$.

En kombination är ett urval av objekt utan hänsyn till ordning (utan endast till sammanlagt "innehåll"). Tex. mängden av alla möjliga tärningsutfall $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sats 1.2. (Multiplikationsprincipen för permutationer) Om ett experiment utföres i k stycken steg och steg nummer i kan utfalla på n_i stycken olika sätt för $i = 1, \ldots, k$ så kan experimentet utfalla på $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ olika sätt.

Notera vi tar hänsyn till ordning ovan, dvs. räknar antalet möjliga olika permutationer.

Bevis. Inses lätt. □

Sats 1.3. Antalet olika sätt man kan välja ut r stycken objekt bland n stycken olika objekt med hänsyn till ordningen mellan dem (dvs. permutationer) är

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Bevis. Inses lätt. □

Sats 1.4. Antalet olika sätt man kan välja ut r stycken objekt bland n stycken olika objekt utan hänsyn till ordningen mellan dem (dvs. kombinationer) är

$$n \text{ över } r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Bevis. Antalet permutationer av r objekt är $r!$. Så om vi dividerar antalet permutationer av r objekt valda bland n med $r!$ får vi antalet möjliga kombinationer av r objekt valda bland n. □

Exempel 1.1. (Example 1.3.6 M&A) Av 20 maskiner har 5 tillverkningsfel. En potentiell köpare väljer inspektera 3 slumpmässigt valda maskiner bland de 20. Om alla de 3 utvalda är felfria köpes alla 20 maskinerna och i annat fall inga. Vad är sannolikheten att köpet blir av?

Lösning. Vi räknar kombinationer: antalet sätt välja 3 maskiner bland alla 20 utan hänsyn till ordning är

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \ldots = 1140.$$

Antalet sätt välja 3 maskiner bland de felfria 15 utan hänsyn till ordning är

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \ldots = 455.$$

Så enligt den klassiska sannolikhetsformeln blir

$$\mathbf{P}(\text{köpet blir av}) = \frac{455}{1140}.$$

Sats 1.5. Antalet olika sätt (permutationer) att ordna n stycken objekt som är av k stycken olika sorter där det finns n_i stycken (oskiljbara) av varje sort för sort nummer $i = 1, \ldots, k$ (så att $n = n_1 + \ldots + n_k$) är

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Bevis. Antalet permutationer av n objekt är $n!$. I det aktuella fallet går det gruppera dessa $n!$ permutation i grupper med $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ oskiljbara objekt i var grupp. $\square$

Exempel 1.2. (Example 1.3.8 M&A) En ingenjör startar 10 trafikljus som kan vara röda, gröna eller gula med sannolikhet 1/3 vardera. Vad är sannolikheten att det blir 3 röda, 2 gröna och 5 gula ljus då ingenjören startar 10?

Lösning. Vi räknar permutationer: det finns 3^{10} olika sätt ordna 10 stycken färger valda bland rött, grönt och gult. Enligt föregående sats finns

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!}$$

sätt ordna 3 röda, 2 gröna och 5 gula ljus. Så klassiska sannolikhetsformeln ger

$$\mathbf{P}(\text{3 röda, 2 gröna och 5 gula ljus}) = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} \Big/ 3^{10} = \frac{2520}{59049}.$$

Här kommer ett exempel för självstudium där vi räknar kombinationer.

Exempel 1.3. Sannolikheten för triss i en pokergiv är

$$\binom{13}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{4}{1}^2\bigg/\binom{52}{5}.$$

Sannolikheten för två par i en pokergiv är

$$\binom{13}{2}\cdot\binom{4}{2}^2\cdot\binom{11}{1}\cdot\binom{4}{1}\bigg/\binom{52}{5}.$$

Detta exempel är ej lätt men man kan enkelt testa sina teoretiska resultats riktighet mha. datorsimulering, dvs. skapa ett stort antal slumpmässiga pokerhänder i dator och se hur stor andel ger triss respektive två par. Rekommenderas!

Kapitel 2. "Some Probability Laws"

Definition 2.1. Ett sannolikhetsmått $\mathbf{P}(\cdot)$ tilldelar sannolikheter $\mathbf{P}(A)$ till händelser $A \subseteq S$ på ett sådant vis att

1. $\mathbf{P}(A) \geq 0$ för $A \subseteq S$,
2. $\mathbf{P}(S) = 1$,
3. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ för $A, B \subseteq S$ sådana att $A \cap B = \emptyset$.

Exempel 2.1. För kast med två tärningar kan vi välja utfallsrummet

$$S = \big\{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\big\}.$$

För "balanserade" tärningar väljer vi sannolikhetsmåttet

$$\mathbf{P}(A) = \#A/36 \tag{1}$$

(se klassiska sannolikhetsformeln) så speciellt $\mathbf{P}(\{(i,j)\}) = 1/36$ för alla $(i,j) \in S$. Överkurs. För obalanserade tärningar är det svårare men efter lite funderande finner man att det rimliga valet av sannolikhetsmått är

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{(i,j)\in A} \mathbf{P}(\{(i,j)\}) \quad \text{där} \quad \mathbf{P}(\{(i,j)\}) = \mathbf{P}_1(\{i\}) \cdot \mathbf{P}_2(\{j\}) \tag{2}$$

samt $\mathbf{P}_1(\cdot)$ och $\mathbf{P}_2(\cdot)$ är sannolikhetsmåtten som beskriver första respektive andra tärningens egenskaper med enda kraven

$$\mathbf{P}_1(\{i\}),\ \mathbf{P}_2(\{j\}) \geq 0 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{6} \mathbf{P}_1(\{i\}) = \sum_{j=1}^{6} \mathbf{P}_2(\{j\}) = 1.$$

Från axiomen för sannolikhetsmått i definition 2.1 kan många fler regler härledas. Men då definition 2.1 är enda kravet på $\mathbf{P}(\cdot)$ måste alla härledningar baseras på den.

Sats 2.2. 1. $\mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$ för $A \subseteq S$,

2. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$,

3. $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ för $A_1, \ldots, A_n \subseteq S$ sådana att $A_i \cap A_j = \emptyset$ för $i \neq j$,

4. $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$ för $A, B \subseteq S$,

5. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ för $A, B \subseteq S$.

$\overline{A} = A^c$ är komplementet till $A \subseteq S$, dvs. $\overline{A} = A^c = S \setminus A =$ "allt i S förutom A".

Bevis. 1. Eftersom $A \cup A^c = S$ och $A \cap A^c = \emptyset$ är

$$1 =_{\text{axiom } 2} \mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(A \cup A^c) =_{\text{axiom } 3} \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^c).$$

2. För $A = S$ är $\mathbf{P}(A) =_{\text{axiom } 2} 1$ så att $\mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{P}(A^c) =_1 1 - \mathbf{P}(A) = 0$.

3. Detta följer genom upprepad användning av axiom 3 enligt

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbf{P}\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\big) \cup A_n\Big) =_{\text{axiom } 3} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) + \mathbf{P}(A_n) = \ldots = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

4. Eftersom

$$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \quad \text{där} \quad (A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

är $\mathbf{P}(A) =_{\text{axiom } 3} \mathbf{P}(A \setminus B) + \mathbf{P}(A \cap B)$.

5. Eftersom $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ där $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ är

$$\mathbf{P}(A \cup B) =_{\text{axiom } 3} \mathbf{P}(A \setminus B) + \mathbf{P}(B) =_4 \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B). \qquad \square$$

Definition 2.3. Den betingade sannolikheten $\mathbf{P}(A|B)$ för händelsen $A \subseteq S$ givet (man vet) att händelsen $B \subseteq S$ inträffar ges av

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Min praktiska uppfattning om tex. sannolikheten få triss eller fyrtal i ess i en pokergiv ändras om jag ser en motspelare får ett ess. Definitionen ovan reglerar detta i teorin. (Överkurs: visa sannolikheten få triss i ess i en pokergiv om en motspelare får ett ess är 13/47 av sannolikheten få triss i ess genom modifiera uträkningen i exempel 1.3.)

Definition 2.4. Händelserna $A, B \subseteq S$ är <u>oberoende</u> om $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$. Händelserna $A_1, \ldots, A_n \subseteq S$ är oberoende om $\mathbf{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k}) = \mathbf{P}(A_{n_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{n_k})$ för varje val av $k \in \{2, \ldots, n\}$ stycken olika $A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}$ bland dem.

I praktiken användes ofta oberoende. Tex. kan man tänka att sannolikheten att en bil är en vit Volvo är lika med sannolikheten att en bil är vit gånger sannolikheten att en bil är en Volvo. Definitionen ovan reglerar detta i teorin.

Sats 2.5. För oberoende händelser $A, B \subseteq S$ är $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$.

Bevis. Inses lätt. $\square$

Exempel 2.1. (FORTS.) För händelserna $A =$ "summan av tärningarna ≥ 10" $= \{(4,6), (5,6), (6,6), (5,5), (6,5), (6,4)\}$ och $B =$ "första tärningen visar 5" $= \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$ är enligt (1) $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/6$ och $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\{(5,5), (5,6)\}) = 1/18 \neq 1/36 = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ så att $\mathbf{P}(A|B) = (1/18)/(1/6) = 1/3 \neq 1/6 = \mathbf{P}(A)$. Alltså är A och B ej oberoende.
Överkurs. Visa att A och B är oberoende om tärning 1 är obalanserad med $\mathbf{P}_1(\{4\}) = \mathbf{P}_1(\{5\}) = \mathbf{P}_1(\{6\}) = 1/3$ i (2) medan tärning 2 är balanserad.

Sats 2.6. (BAYES FORMEL) För händelser $A_1, \ldots, A_n \subseteq S$ sådana att $A_i \cap A_j = \emptyset$ för $i \neq j$ och $A_1 \cup \ldots \cup A_n = S$ gäller att

$$\mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_i)\,\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B|A_j)\,\mathbf{P}(A_j)} \quad \text{för } B \subseteq S.$$

Bevis. Enligt definition 2.3 är täljaren i Bayes formel lika med $\mathbf{P}(B \cap A_i) = \mathbf{P}(A_i \cap B)$ medan nämnaren är lika med

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(B \cap A_j) =_{3 \text{ i sats } 2.2} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} B \cap A_j\Big) = \mathbf{P}\Big(B \cap \big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\big)\Big) = \mathbf{P}(B \cap S) = \mathbf{P}(B).$$

Kvoten i Bayes formel är alltså lika med $\mathbf{P}(A_i \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_i|B)$. $\square$

Exempel 2.2. (Example 2.4.2 M&A) Följande fördelning av blodtyper gäller:

$$\begin{cases} 41\% \text{ har blodtyp } \mathrm{A} = \text{händelse } A_1 \\ 9\% \text{ har blodtyp } \mathrm{B} = \text{händelse } A_2 \\ 4\% \text{ har blodtyp } \mathrm{AB} = \text{händelse } A_3 \\ 46\% \text{ har blodtyp } \mathrm{O} = \text{händelse } A_4 \end{cases}.$$

Låt C vara händelsen att en individ diagnostiseras ha blodtyp A. En diagnostiseringsmetod har följande prestanda: sannolikheten diagnostiseras ha blodtyp A är

$$\begin{cases} 88\% \text{ om individen har blodtyp } \mathrm{A} = \mathbf{P}(C|A_1) \\ 4\% \text{ om individen har blodtyp } \mathrm{B} = \mathbf{P}(C|A_2) \\ 10\% \text{ om individen har blodtyp } \mathrm{AB} = \mathbf{P}(C|A_3) \\ 4\% \text{ om individen har blodtyp } \mathrm{O} = \mathbf{P}(C|A_4) \end{cases}.$$

Vad är sannolikheten att en individ diagnostiserad ha blodtyp A har blodtyp A?

Lösning. Vi söker $\mathbf{P}(A_1|C)$ som enligt Bayes formel kan beräknas enligt

$$\mathbf{P}(A_1|C) = \frac{\mathbf{P}(C|A_1)\,\mathbf{P}(A_1)}{\sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(C|A_i)\,\mathbf{P}(A_i)} = \frac{0.88 \cdot 0.41}{0.88 \cdot 0.41 + 0.04 \cdot 0.09 + 0.10 \cdot 0.04 + 0.04 \cdot 0.46}.$$