MVE090 LP4 2021 Föreläsning 1-2

Kapitel 1. "Introduction to Probability and Counting"

Man utför ett slumpmässigt experiment. Som tex. kasta en tärning.

Mängden av alla möjliga utfall av experimentet kallas utfallsrummet S. Tex. är $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ för kast med en tärning.

En delmängd $A \subseteq S$ av utfallsrummet kallas händelse. Tex. är resultatet att tärningen visar mindre lika 3 vid tärningskast händelsen $A = \{1, 2, 3\} \subseteq S$.

Ett sannolikhetsmått $\mathbf{P}(\cdot)$ tilldelar sannolikheter $\mathbf{P}(A)$ åt händelser $A \subseteq S$.

Definition 1.1. (Klassiska sannolikhetsformeln) Om alla utfall är lika sannolika är

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{\text{antalet utfall i } A}{\text{antalet utfall i } S} \quad \text{för } A \subseteq S.$$

Tex. är

$$\mathbf{P}(\text{tärningen visar mindre lika 3}) = \mathbf{P}(\{1, 2, 3\}) = \frac{\#\{1, 2, 3\}}{\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}} = \frac{3}{6}.$$

En permutation är ett arrangemang av objekt i en viss ordning. Tex. de sex möjliga tärningsutfallen i avtagande ordning $6, 5, 4, 3, 2, 1$.

En kombination är ett urval av objekt utan hänsyn till ordning (utan endast till sammanlagt "innehåll"). Tex. mängden av alla möjliga tärningsutfall $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Sats 1.2. (Multiplikationsprincipen för permutationer) Om ett experiment utföres i k stycken steg och steg nummer i kan utfalla på n_i stycken olika sätt för $i = 1, \ldots, k$ så kan experimentet utfalla på $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ olika sätt.

Notera vi tar hänsyn till ordning ovan, dvs. räknar antalet möjliga olika permutationer.

Sats 1.3. Antalet olika sätt man kan välja ut r stycken objekt bland n stycken olika objekt med hänsyn till ordningen mellan dem (dvs. permutationer) är

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Sats 1.4. Antalet olika sätt man kan välja ut r stycken objekt bland n stycken olika objekt utan hänsyn till ordningen mellan dem (dvs. kombinationer) är

$$n \text{ över } r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}.$$

Exempel 1.1. 5 maskiner av 20 är felaktiga. En kund inspekterar 3 slumpmässigt valda maskiner av de 20. Om de 3 utvalda är felfria köpes alla 20 maskinerna och annars inga. Vad är sannolikheten köpet blir av?

Lösning. Vi räknar kombinationer: antalet sätt välja 3 maskiner bland 20 utan hänsyn till ordning är

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \ldots = 1140.$$

Antalet sätt välja 3 maskiner bland de felfria 15 utan hänsyn till ordning är

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \ldots = 455.$$

Så enligt den klassiska sannolikhetsformeln blir

$$\mathbf{P}(\text{köpet blir av}) = \frac{455}{1140}.$$

Sats 1.5. Antalet olika sätt (permutationer) att ordna n stycken objekt som är av k stycken olika sorter där det finns n_i stycken (oskiljbara) av varje sort för sort nummer $i = 1, \ldots, k$ (så att $n = n_1 + \ldots + n_k$) är

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exempel 1.2. Nystartade trafikljus kan vara röda, gröna eller gula med sannolikhet 1/3 var. Finn sannolikheten för 3 röda, 2 gröna och 5 gula ljus då 10 startas.

Lösning. Vi räknar permutationer: det finns 3^{10} olika sätt ordna 10 stycken färger valda bland rött, grönt och gult. Enligt föregående sats finns

$$\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!}$$

sätt ordna 3 röda, 2 gröna och 5 gula ljus. Så klassiska sannolikhetsformeln ger

$$\mathbf{P}(\text{3 röda, 2 gröna och 5 gula ljus}) = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 5!} \Big/ 3^{10} = \frac{2520}{59049}.$$

Exempel 1.3. Sannolikheten för triss i en pokergiv är

$$\binom{13}{1} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{4}{1}^2 \Big/ \binom{52}{5}.$$

Sannolikheten för två par i en pokergiv är

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{4}{1} \Big/ \binom{52}{5}.$$

Kapitel 2. "Some Probability Laws"

Definition 2.1. Ett sannolikhetsmått $\mathbf{P}(\cdot)$ tilldelar sannolikheter $\mathbf{P}(A)$ till händelser $A \subseteq S$ på ett sådant vis att

1. $\mathbf{P}(A) \geq 0$ för $A \subseteq S$,
2. $\mathbf{P}(S) = 1$,
3. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ för $A, B \subseteq S$ sådana att $A \cap B = \emptyset$.

Exempel 2.1. För kast med två tärningar kan vi välja utfallsrummet

$$S = \big\{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\big\}.$$

För "balanserade" tärningar väljer vi sannolikhetsmåttet

$$\mathbf{P}(A) = \#A/36 \tag{1}$$

(se klassiska sannolikhetsformeln) så speciellt $\mathbf{P}(\{(i,j)\}) = 1/36$ för alla $(i,j) \in S$.

Från axiomen för sannolikhetsmått i definition 2.1 kan många fler regler härledas.

Sats 2.2.

1. $\mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(A^c) = 1 - \mathbf{P}(A)$ för $A \subseteq S$,
2. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$,
3. $\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ för $A_1, \ldots, A_n \subseteq S$ sådana att $A_i \cap A_j = \emptyset$ för $i \neq j$,
4. $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B)$ för $A, B \subseteq S$,
5. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$ för $A, B \subseteq S$.

$\overline{A} = A^c$ är <u>komplementet</u> till $A \subseteq S$, dvs. $\overline{A} = A^c = S \setminus A =$ "allt i S förutom A".

Bevis. 1. Eftersom $A \cup A^c = S$ och $A \cap A^c = \emptyset$ är

$$1 =_{\text{axiom 2}} \mathbf{P}(S) = \mathbf{P}(A \cup A^c) =_{\text{axiom 3}} \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A^c).$$

2. För $A = S$ är $\mathbf{P}(A) =_{\text{axiom 2}} 1$ så att $\mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{P}(A^c) =_1 1 - \mathbf{P}(A) = 0$.

3. Detta följer genom upprepad användning av axiom 3 enligt

$$\mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \mathbf{P}\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\big) \cup A_n\Big) =_{\text{axiom 3}} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) + \mathbf{P}(A_n) = \ldots = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

4. Eftersom

$$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \quad \text{där} \quad (A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

är $\mathbf{P}(A) =_{\text{axiom 3}} \mathbf{P}(A \setminus B) + \mathbf{P}(A \cap B)$.

5. Eftersom $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ där $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ är

$$\mathbf{P}(A \cup B) =_{\text{axiom 3}} \mathbf{P}(A \setminus B) + \mathbf{P}(B) =_4 \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(B). \qquad \square$$

Definition 2.3. Den betingade sannolikheten $\mathbf{P}(A|B)$ för händelsen $A \subseteq S$ givet (man vet) att händelsen $B \subseteq S$ inträffar ges av

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Den praktiska uppfattningen om tex. sannolikheten få triss eller fyrtal i ess i pokergiv ändras om man ser motspelare få ett ess. Definitionen ovan reglerar detta i teorin.

Definition 2.4. Händelserna $A, B \subseteq S$ är oberoende om $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$. Händelserna $A_1, \ldots, A_n \subseteq S$ är oberoende om $\mathbf{P}(A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k}) = \mathbf{P}(A_{n_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{n_k})$ för varje val av $k \in \{2, \ldots, n\}$ stycken olika $A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}$ bland dem.

I praktiken användes ofta oberoende. Tex. kan man tänka att sannolikheten att en bil är en vit Volvo är lika med sannolikheten att en bil är vit gånger sannolikheten att en bil är en Volvo. Definitionen ovan reglerar detta i teorin.

Sats 2.5. För oberoende händelser $A, B \subseteq S$ är $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$.

Exempel 2.1. (Forts.) För händelserna A = "summan av tärningarna ≥ 10" $= \{(4,6), (5,6), (6,6), (5,5), (6,5), (6,4)\}$ och B = "första tärningen visar 5" $= \{(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$ är enligt (1) $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/6$ och $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(\{(5,5), (5,6)\}) = 1/18 \neq 1/36 = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ så att $\mathbf{P}(A|B) = (1/18)/(1/6) = 1/3 \neq 1/6 = \mathbf{P}(A)$. Alltså är A och B ej oberoende.

Sats 2.6. (Bayes formel) För händelser $A_1, \ldots, A_n \subseteq S$ sådana att $A_i \cap A_j = \emptyset$ för $i \neq j$ och $A_1 \cup \ldots \cup A_n = S$ gäller att

$$\mathbf{P}(A_i|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_i)\,\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(B|A_j)\,\mathbf{P}(A_j)} \quad \text{för } B \subseteq S.$$

Bevis. Enligt definition 2.3 är täljaren i Bayes formel lika med $\mathbf{P}(B \cap A_i) = \mathbf{P}(A_i \cap B)$ medan nämnaren är lika med

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(B \cap A_j) =_{\text{3 i sats 2.2}} \mathbf{P}\Big(\bigcup_{j=1}^n B \cap A_j\Big) = \mathbf{P}\Big(B \cap \big(\bigcup_{j=1}^n A_j\big)\Big) = \mathbf{P}(B \cap S) = \mathbf{P}(B).$$

Kvoten i Bayes formel är alltså lika med $\mathbf{P}(A_i \cap B)/\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_i|B)$. $\square$

Exempel 2.2. Följande fördelning av blodtyper gäller:

$$\begin{cases} 41\% \text{ har blodtyp } \text{A} = \text{händelse } A_1 \\ 9\% \text{ har blodtyp } \text{B} = \text{händelse } A_2 \\ 4\% \text{ har blodtyp } \text{AB} = \text{händelse } A_3 \\ 46\% \text{ har blodtyp } \text{O} = \text{händelse } A_4 \end{cases}.$$

Låt C vara händelsen att en individ diagnostiseras ha blodtyp A. En diagnostiseringsmetod har följande prestanda: sannolikheten diagnostiseras ha blodtyp A är

$$\begin{cases} 88\% \text{ om individen har blodtyp } \text{A} = \mathbf{P}(C|A_1) \\ 4\% \text{ om individen har blodtyp } \text{B} = \mathbf{P}(C|A_2) \\ 10\% \text{ om individen har blodtyp } \text{AB} = \mathbf{P}(C|A_3) \\ 4\% \text{ om individen har blodtyp } \text{O} = \mathbf{P}(C|A_4) \end{cases}.$$

Vad är sannolikheten att en individ diagnostiserad ha blodtyp A har blodtyp A?

Lösning. Vi söker $\mathbf{P}(A_1|C)$ som enligt Bayes formel kan beräknas enligt

$$\mathbf{P}(A_1|C) = \frac{\mathbf{P}(C|A_1)\,\mathbf{P}(A_1)}{\sum_{j=1}^{4}\mathbf{P}(C|A_j)\,\mathbf{P}(A_j)} = \frac{0.88\cdot 0.41}{0.88\cdot 0.41 + 0.04\cdot 0.09 + 0.10\cdot 0.04 + 0.04\cdot 0.46}.$$