MVE090 LP4 2021 Föreläsning 3-4

Författare: examinator Patrik Albin (=jag)

Inledning

I kapitel 2 infördes den grundläggande "infrastrukturen" på vilken man utför sannolikhetsberäkningar. Det denna infrastruktur huvudsakligen användes till är att räkna på <u>*stokastiska variabler*</u> *(se definition 3.1 nedan) vilket jag nu skall börja lära er.*

Numreringen av mina kapitel är samma som i M&A, så det är inte föreläsningsnumret (även om de är samma i föreläsning 1-2 och till en början här i föreläsning 3-4).

Kapitel 3. "Discrete Distributions"

Detta kapitel handlar om diskreta stokastiska variabler, se definition 3.2 nedan.

Definition 3.1. En <u>stokastisk variabel</u> X är en funktion $X : S \to \mathbb{R}$ från ett utfallsrum S till de reella talen $\mathbb{R}$.

Till varje utfall $\omega \in S$ ordnar alltså den stokastiska variabeln X ett reellt tal $X(\omega)$.

Exempel 2.1. (Forts.) För kast med två tärningar är summan av vad tärningarna visar ett exempel på en stokastisk variabel, dvs.

$$S = \big\{\{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\big\} \quad \text{och} \quad X((i,j)) = i + j.$$

Definition 3.2. En stokastisk variabel X är <u>diskret</u> om den har antingen ändligt många eller uppräkneligt oänligt många (olika) möjliga värden.

Exempel på ändliga mängder är $\{1, 2, \ldots, n\}$ etc. Exempel på uppräkneligt oändliga mängder är heltal $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ eller $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ och rationella tal $\mathbb{Q}$.

Om utfallsrummet S är diskret måste varje stokastisk variabel $X : S \to \mathbb{R}$ definierad på S vara diskret: antalet möjliga värden för $X(\omega)$ kan inte vara fler än antalet $\omega \in S$.

Definition 3.3. För en diskret stokastisk variabel X definieras <u>frekvensfunktionen</u> eller <u>täthetsfunktionen</u> $f(x) = f_X(x)$ [två olika benämningar för samma funktion som på engelska kallas "(probability) density function"] genom

$$f(x) = f_X(x) = \mathbf{P}(X = x) \quad \text{för möjliga värden } x \text{ för } X.$$

Det är en smaksak och kan bero på sammanhang om man väljer enklare beteckningen $f(x)$ eller utförligare $f_X(x)$ som betonar det handlar om frekvensfuntionen för just X.

Kom ihåg att sannolikhetsmått tilldelar sannolikheter till händelser $A \subseteq S$ och $\mathbf{P}(X = x)$ är ett förkortat skrivsätt för $\mathbf{P}(\{\omega \in S : X(\omega) = x\})$ där $\{\omega \in S : X(\omega) = x\}$ är händelsen att utfallet $\omega \in S$ av slumförsöket är sådant att $X(\omega) = x$.

Exempel 2.1. (Forts.) För X summan av två balanserade tärningar är

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/36 & \text{för} \quad x = 2 \;\text{ och }\; x = 12 \\ 2/36 & \text{för} \quad x = 3 \;\text{ och }\; x = 11 \\ 3/36 & \text{för} \quad x = 4 \;\text{ och }\; x = 10 \\ 4/36 & \text{för} \quad x = 5 \;\text{ och }\; x = 9 \\ 5/36 & \text{för} \quad x = 6 \;\text{ och }\; x = 8 \\ 6/36 & \text{för} \quad x = 7 \end{cases}.$$

Här använder vi klassiska sannolikhetsformeln enligt (1) i kapitel 2. Tex. innehåller händelsen $A = \{X = 4\}$ = "summan av tärningarna = 4" de tre utfallen $(1,3)$, $(2,2)$ och $(3,1)$ med sannolikhet $1/36$ vardera så att $\mathbf{P}(X = 4) = 3/36$.

Definition 3.4. För en stokastisk variabel X definieras <u>fördelningsfunktionen</u> $F(x) = F_X(x)$ (engelska "cummulative distribution function") genom

$$F(x) = F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(\{\omega \in S : X(\omega) \leq x\}).$$

Exempel 2.1. (Forts.) För X summan av två balanserade tärningar är

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{för} \quad x < 2 \\ 1/36 & \text{för} \quad 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & \text{för} \quad 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & \text{för} \quad 4 \leq x < 5 \\ 10/36 & \text{för} \quad 5 \leq x < 6 \\ 15/36 & \text{för} \quad 6 \leq x < 7 \\ 21/36 & \text{för} \quad 7 \leq x < 8 \\ 26/36 & \text{för} \quad 8 \leq x < 9 \\ 30/36 & \text{för} \quad 9 \leq x < 10 \\ 33/36 & \text{för} \quad 10 \leq x < 11 \\ 35/36 & \text{för} \quad 11 \leq x < 12 \\ 1 & \text{för} \quad 12 \leq x \end{cases}.$$

Här använder vi vad vi vet om $f_X(x)$ från ovan. Tex. är

$$F_X(3.5) = \mathbf{P}(X \le 3.5) = \mathbf{P}(\{X=2\} \cup \{X=3\})$$
$$= \mathbf{P}(X=2) + \mathbf{P}(X=3) = f_X(2) + f_X(3) = 3/36$$

eftersom händelserna $\{X = 2\} = \{(1,1)\}$ och $\{X = 3\} = \{(1,2),(2,1)\}$ ej överlappar $\{X = 2\} \cap \{X = 3\} = \emptyset$ (kom ihåg axiom 3 i definition 2.1).

Sats 3.5. För en diskret stokastisk variabel X med frekvensfunktion $f_X(x)$ är

1. $f_X(x) \ge 0$ för all x,
2. $\sum\limits_{\text{alla } x} f_X(x) = 1$,
3. $\mathbf{P}(X \in C) = \sum\limits_{\text{alla } x \in C} f_X(x)$ för $C \subseteq \mathbb{R}$.

Bevis. 1. Följer av att $f_X(x)$ är en sannolikhet.

2. Följer av att ta $C = \mathbb{R}$ i 3.

3. Analogt med hur jag visade $F_X(3.5) = 3/36$ för X summan av två tärningar ovan är

$$\mathbf{P}(X \in C) = \mathbf{P}\Big(\bigcup_{x\in C} \{X = x\}\Big) = \sum_{x\in C} \mathbf{P}(X = x).$$

Här följer andra likheten av 3 i Sats 2.2 eftersom $\{X = y\} \cap \{X = z\} = \emptyset$ för $y \ne z$: den stokastiska variabeln X kan inte vara lika med både y och z på en gång, dvs. det finns inga utfall $\omega \in S$ som tillhör båda händelserna $\{X = y\} = \{\omega \in S : X(\omega) = y\}$ och $\{X = z\} = \{\omega \in S : X(\omega) = z\}$ då $y \ne z$. □

Definition 3.6. Väntevärdet $\mathbf{E}(X)$ av en diskret stokastisk variabel X definieras

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\text{alla } x} x\, f_X(x).$$

Väntevärde (engelska “expectation) är tyngdpunkten för den diskreta grafen av frekvensfunktionen $f_X(x)$. Väntevärdet $\mathbf{E}(X)$ betecknas ofta μ eller (tydligare) μ_X.

Exempel 2.1. (Forts.) För X summan av två balanserade tärningar är det klart [studera uttrycket för $f_X(x)$ ovan] att tyngdpunkten för $f_X(x)$ är $\mathbf{E}(X) = 7$. Det kan jag också räkna ut (utan att behöva “inse” något) mha definition 3.6:

$$\mathbf{E}(X)$$
$$= 2\cdot\tfrac{1}{36} + 3\cdot\tfrac{2}{36} + 4\cdot\tfrac{3}{36} + 5\cdot\tfrac{4}{36} + 6\cdot\tfrac{5}{36} + 7\cdot\tfrac{6}{36} + 8\cdot\tfrac{5}{36} + 9\cdot\tfrac{4}{36} + 10\cdot\tfrac{3}{36} + 11\cdot\tfrac{2}{36} + 12\cdot\tfrac{1}{36}$$
$$= \ldots = \tfrac{252}{36} = 7.$$

Om $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en funktion och $X : S \to \mathbb{R}$ en stokastisk variabel är även $h(X) = h(X(\omega))$ en stokastisk variabel (ty funktion av utfallet $\omega \in S$ av ett slumpexperiment).

Sats 3.7. Väntevärdet av funktionen $h(X)$ av en diskret stokastisk variabel X är

$$\mathbf{E}(h(X)) = \sum_{\text{alla } k} h(k)\, f_X(k).$$

Bevis. Överkurs. $\mathbf{E}(h(X)) = \sum_{\text{alla } h(x)} h(x)\,\mathbf{P}(h(X) = h(x)) = \sum_{\text{alla } x} h(x)\,\mathbf{P}(X = x).$ □

Exempel 2.1. (Forts.) För X summan av två balanserade tärningar och

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad x \in \{2,4,6,8,10,12\} \quad \text{är jämn} \\ 1 & \text{om} \quad x \in \{3,5,7,9,11\} \quad \text{är udda} \end{cases}$$

är $\mathbf{E}(h(X)) = 1/2$ ty sannolikheten att X är jämn är $f_X(2) + f_X(4) + f_X(6) + f_X(8) + f_X(10) + f_X(12) = \ldots = 1/2$ så att sannolikheten att X är udda också är $1/2$. Det kan jag också räkna ut (utan behöva inse något) mha. sats 3.7:

$$\mathbf{E}(h(X))$$
$$= 0\cdot\tfrac{1}{36} + 1\cdot\tfrac{2}{36} + 0\cdot\tfrac{3}{36} + 1\cdot\tfrac{4}{36} + 0\cdot\tfrac{5}{36} + 1\cdot\tfrac{6}{36} + 0\cdot\tfrac{5}{36} + 1\cdot\tfrac{4}{36} + 0\cdot\tfrac{3}{36} + 1\cdot\tfrac{2}{36} + 0\cdot\tfrac{1}{36} = \tfrac{18}{36}.$$

Sats 3.8. För två diskreta stokastiska variabler X och Y är

1. $\mathbf{E}(X) = c$ om X är en konstant stokastisk variabel $X = c$ för ett $c \in \mathbb{R}$,
2. $\mathbf{E}(c\,X) = c\,\mathbf{E}(X)$ för en konstant $c \in \mathbb{R}$,
3. $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$.

Bevis. 1. Enligt definition 3.6 är

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\text{alla } x} x\, f_X(x) = c\, f_X(c) = c \cdot 1 = c.$$

2. Genom ta $h(x) = c\,x$ i sats 3.7 och därefter använda definition 3.6 ser jag att

$$\mathbf{E}(c\,X) = \sum_{\text{alla } x} h(x)\, f_X(x) = \sum_{\text{alla } x} c\,x\, f_X(x) = c\,\mathbf{E}(X).$$

3. Detta kan jag ej bevisa förrän jag kommit en bit in i kapitel 5 i M&A. □

Definition 3.9. Variansen $\mathbf{Var}(X)$ av en stokastisk variabel X definieras

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}\big([X - \mathbf{E}(X)]^2\big) = \mathbf{E}((X - \mu_X)^2)$$

Standardavvikelsen av X definieras som $\sqrt{\mathbf{Var}(X)}$.

Variansen $\mathbf{Var}(X)$ betecknas ofta σ^2 eller σ_X^2 och standardavvikelsen σ eller σ_X.

Variansen $\mathbf{Var}(X)$ är ett (kvadratiskt) mått på hur utspridd grafen av frekvensfuntionen är kring sin tyngpunkt $\mathbf{E}(X)$ – stor varians betyder en bred graf och liten varians en smal graf koncentrerad kring $\mathbf{E}(X)$. Standardavvikelsen σ_X betyder samma sak men i verklig (ej kvadrerad) skala.

Sats 3.10. För två diskreta stokastiska variabler X och Y är

1. $\mathbf{Var}(X) = \sum_{\text{alla } x} (x - \mu_X)^2$,
2. $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \mathbf{E}(X^2) - \mu_X^2$,
3. $\mathbf{Var}(X) = 0$ om X är en konstant stokastisk variabel $X = c$ för ett $c \in \mathbb{R}$,
4. $\mathbf{Var}(c\,X) = c^2\,\mathbf{Var}(X)$ för en konstant $c \in \mathbb{R}$,
5. $\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y)$ om X och Y är oberoende.

Att X och Y är oberoende betyder att $\mathbf{P}(\{X \in C\} \cap \{Y \in D\}) = \mathbf{P}(X \in C)\,\mathbf{P}(Y \in D)$ för $C, D \subseteq \mathbb{R}$. Detta lär jag ut i kapitel 5 i M&A så fundera inte mer på det nu.

Föresten skriver jag ofta $\mathbf{P}(A, B)$ istf. $\mathbf{P}(A \cap B)$ i fortsättningen – de är synonyma.

Bevis. 1. Följer direkt av använda sats 3.7 med $h(x) = (x - \mu_X)^2$.

2. Genom använda alla tre delarna av sats 3.8 följer att

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}((X - \mu_X)^2) &= \mathbf{E}\big(X^2 - 2\,\mu_X\,X + \mu_X^2\big) \\ &= \mathbf{E}(X^2) - 2\,\mu_X\,\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(\mu_X^2) = \mathbf{E}(X^2) - \mu_X^2.\end{aligned}$$

3. Enligt 1 i sats 3.8 är $\mathbf{E}(X) = c$ så att $(X - \mu_X)^2 = 0$ som har väntevärde $\mathbf{E}(0) = 0$.

4. Enligt 2 i sats 3.8 är $(c\,X - \mu_{cX})^2 = (c\,X - c\,\mu_X)^2 = c^2\,(X - \mu_X)^2$ som (enligt 2 i sats 3.8) har väntevärde $c^2\,\mathbf{E}((X - \mu_X)^2) = c^2\,\mathbf{Var}(X)$.

5. Detta kan jag ej bevisa förrän jag kommit en bit in i kapitel 5 i M&A. $\square$

Exempel 2.1. (Forts.) För X summan av två balanserade tärningar är $\mathbf{E}(X^2)$

$2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + 4^2 \cdot \frac{3}{36} + 5^2 \cdot \frac{4}{36} + 6^2 \cdot \frac{5}{36} + 7^2 \cdot \frac{6}{36} + 8^2 \cdot \frac{5}{36} + 9^2 \cdot \frac{4}{36} + 10^2 \cdot \frac{3}{36} + 11^2 \cdot \frac{2}{36} + 12^2 \cdot \frac{1}{36}$

som blir $\ldots = 329/6$ så att enligt sats

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \tfrac{329}{6} - 7^2 = \ldots = \tfrac{35}{6}.$$

Notera att frekvensfunktionen når 5 enheter ut från tyngdpunkten 7 till minsta och största möjliga värdena 2 respektive 12 för X och $\sigma_X = \sqrt{35/6} = 2.41523\ldots$ är cirka vad jag skulle gissa medelmomentavståndet för X värde från 7 bör vara.

Definition 3.11. Den momentgenererande funktionen (MGF) $m_X : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ för en stokastisk variabel X definieras

$$m_X(t) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX}).$$

Sats 3.12. För en stokastisk variabel X gäller att

$$m_X^{(k)}(0) = \tfrac{d^k}{dt^k}\, m_X(t) \,\big|_{t=0} = \mathbf{E}(X^k) \quad \text{för } \; k \in \mathbb{N}.$$

Bevis. $m_X^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dt^k}\, \mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX}) \,\big|_{t=0} = \mathbf{E}\big(\frac{d^k}{dt^k}\, \mathrm{e}^{tX}\big) \,\big|_{t=0} = \mathbf{E}\big(X^k\, \mathrm{e}^{tX}\big) \,\big|_{t=0} = \mathbf{E}(X^k).$ □

Talet $\mathbf{E}(X^k)$ kallas moment av ordning k för den stokastiska variabeln X och $k \in \mathbb{N}$. Moment är en viktig "beskrivande egenskap" för stokastiska variabler (bla. i statistik).

Definition 3.13. En stokastisk variabel X med möjliga värden $1, 2, 3 \ldots$ och frekvensfunktion $f_X(k) = (1-p)^{k-1}p$ för $k = 1, 2, 3 \ldots$ är geometriskt fördelad.

Ovan är $p \in (0,1)$ en sk. parameter, dvs. ett fixt (men godtyckligt valt) tal $p \in (0,1)$. Geometrisk fördelning kallas även väntetidsfördelning enär om man utför ett slumpmässigt experiment som har sannolikhet p att lyckas upprepat tills det lyckas för första gången och X är antalet försök som behövs för det så är X geometriskt fördelad. Ty $X = k$ betyder att först misslyckas $k-1$ försök varefter experiment nummer k lyckas.

Exempel 3.1. En geometrisk fördelad stokastisk variabel X har enligt sats 3.7 och formeln för geometrisk summa momentgenererande funktion

$$\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \sum_{\text{alla } x} \mathrm{e}^{tx} f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{tk}(1-p)^{k-1}p = \mathrm{e}^t p \sum_{k=1}^{\infty} [\mathrm{e}^t(1-p)]^{k-1} = \frac{\mathrm{e}^t p}{1-\mathrm{e}^t(1-p)}.$$

Mha. Mathematica beräknar jag därför lätt $m_X'(0) = \mathbf{E}(X)$

```
In[1]:= Simplify[D[Exp[t]*p/(1-Exp[t]*(1-p)),t]/.{t->0}]
```

Out[1]= $\frac{1}{p}$

och $m_X''(0) = \mathbf{E}(X^2)$

```
In[2]:= Simplify[D[D[Exp[t]*p/(1-Exp[t]*(1-p)),t],t]/.{t->0}]
```

Out[2]= $\frac{2-p}{p^2}$

så att enligt 2 i sats 3.10

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \tfrac{2-p}{p^2} - (\tfrac{1}{p})^2 = \tfrac{1-p}{p^2} = \tfrac{q}{p^2}.$$

Här använde jag standardkonventionen $q = 1-p$ för tal (sannolikheter) $p \in (0,1)$.

Definition 3.14. En stokastisk variabel X med möjliga värden $0, 1, \ldots, n$ och frekvensfunktion $f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ för $k = 0, 1, \ldots, n$ är <u>binomialfördelad</u>.

Ovan är heltalet $n \geq 1$ och $p \in (0,1)$ parametrar och man skriver att X är $\mathrm{Bin}(n,p)$.

Om man utför ett slumpmässigt experiment n gånger som har sannolikhet p att lyckas varje gång och X är antalet lyckade försök bland de n utförda så är X binomialfördelad. Ty varje specifik sekvens av sammanlagt k lyckade och $n-k$ misslyckade försök har sannolikhet $p^k (1-p)^{n-k}$ och enligt sats 1.4 finns $\binom{n}{k}$ olika sådana sekvenser.

Överkurs. Inse summan av n (oberoende) $\mathrm{Bin}(1,p)$ stokastiska variabler är $\mathrm{Bin}(n,p)$.

Exempel 3.2. En binomialfördelad stokastisk variabel X har enligt sats 3.7 och binomialteoremet momentgenererande funktion

$$\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \sum_{\text{alla } x} \mathrm{e}^{tx} f_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \big(\mathrm{e}^t p + (1-p)\big)^n.$$

Mha. Mathematica beräknar jag därför lätt $m'_X(0) = \mathbf{E}(X)$

```
In[3]:= Simplify[D[(Exp[t]*p+(1-p))^n,t]/.{t->0}]
Out[3]= n p
```

och $m''_X(0) = \mathbf{E}(X^2)$

```
In[4]:= Simplify[D[D[(Exp[t]*p+(1-p))^n,t],t]/.{t->0}]
Out[4]= n p (1 + (n - 1) p)
```

så att enligt 2 i sats 3.10

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = n\,p\,(1 + (n-1)\,p) - (n\,p)^2 = n\,p\,(1-p).$$

Definition 3.15. En stokastisk variabel X med möjliga värden $r, r+1, r+2, \ldots$ kallas <u>negativt binomialfördelad</u> om den har frekvensfunktion

$$f_X(k) = \binom{k-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(k-1)-(r-1)} p = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad \text{för } k = r, r{+}1, r{+}2, \ldots .$$

Ovan är heltalet $r \geq 1$ och $p \in (0,1)$ parametrar.

Om man utför ett slumpmässigt experiment som har sannolikhet p att lyckas varje gång till experimentet lyckats r gånger och X är antalet försök som behövs för det är X negativt binomialfördelad. Ty $X = k$ betyder att först är en $\mathrm{Bin}(k-1,p)$ stokastisk variabel lika $r-1$ (dvs. $r-1$ av de $k-1$ första försöken lyckas) med sannolikhet $\binom{k-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{(k-1)-(r-1)}$ och sedan lyckas experiment nummer k med sannolikhet p.

Exempel 3.3. Överkurs. En negativt binomialfördelad stokastisk variabel X har

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \sum_{k=r}^{\infty} \mathrm{e}^{tk} \tbinom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{tr}}{(1-\mathrm{e}^t(1-p))^r} \sum_{k=r}^{\infty} \tbinom{k-1}{r-1} (1-\mathrm{e}^t(1-p))^r [1-(1-\mathrm{e}^t(1-p))]^{k-r} = \frac{\mathrm{e}^{tr}}{(1-\mathrm{e}^t(1-p))^r} \end{aligned}$$

(varför?). Genom inse summan av r (oberoende) väntetidsfördelade stokastiska variabler med parameter p är negativt binomialfördelad kan vi beräkna $\mathbf{E}(X) = r/p$ och $\mathbf{Var}(X) = rq/p^2$ mha. exempel 3.1 samt 3 i sats 3.8 och 5 i sats 3.10.

Definition 3.16. En stokastisk variabel X med möjliga värden $\mathbb{N} = 0, 1, 2 \ldots$ och frekvensfunktion $f_X(k) = (\lambda^k/(k!))\,\mathrm{e}^{-\lambda}$ för $k \in \mathbb{N}$ är Poisson fördelad.

Ovan är $\lambda > 0$ en parameter och man skriver att X är $\mathrm{Po}(\lambda)$.

Poisson fördelningen förekommer i naturen: det slumpmässiga antal sönderfall ett stycke radioaktivt material har per tidsenhet har denna födelning (kan man bevisa mha. fysikens axiom). MVE090-kursens första projekt anknyter till detta.

Exempel 3.4. För en Poisson fördelad stokastisk variabel X är

$$m_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{tk} (\lambda^k/(k!))\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{e}^t\lambda)^k/(k!) = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^t\lambda} = \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^t-1)\lambda}$$

enligt Taylor utveckling, så att $m_X'(0) = \mathbf{E}(X)$ är

```
In[5]:= Simplify[D[Exp[(Exp[t]-1)*lambda],t]/.{t->0}]
Out[5]= lambda
```

och $m_X''(0) = \mathbf{E}(X^2)$ är

```
In[6]:= Simplify[D[D[Exp[(Exp[t]-1)*lambda],t],t]/.{t->0}]
Out[6]= lambda (1 + lambda)
```

vilket ger

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = lambda\,(1 + lambda) - lambda^2 = lambda.$$

Definition 3.17. En stokastisk variabel X är hypergeometriskt fördelad om den har möjliga värden $\{\max[0, n-(N-r))], \ldots, \min[n, r]\}$ och frekvensfunktion

$$f_X(k) = \tbinom{r}{k}\tbinom{N-r}{n-k} \,/\, \tbinom{N}{n} \quad \text{för } k \in \{\max[0, n-(N-r))], \ldots, \min[n, r]\}.$$

Ovan är heltalen $N \geq 2$ och $r, n \in \{1, \ldots, N\}$ parametrar.

Om man slumpmässigt väljer ut n objekt från en population om N objekt varav r objekt är OK och $N - r$ objekt är ej OK och om X är antalet OK objekt man erhåller så är X enligt sats 1.4 och klassiska sannolikhetsformeln hypergeometrisk fördelad.

Det är intuitivt klart att $\mathbf{E}(X) = n\,(r/N)$ och $\mathbf{Var}(X)$ anges i boken.

Simulering av diskret stokastisk variabel. En observation av en stokastisk variabel X är värdet X får då man utför det slumpmässiga experimentet en gång och använder utfallet $\omega \in S$ till räkna ut den stokastiska variabelns värde $X(\omega)$ enligt definition 3.1.

Hur gör man en observation av en diskret stokastisk variabel X med möjliga värden $x_1, x_2, x_3 \ldots$ med respektive sannolikheter $f_X(x_1), f_X(x_2), f_X(x_3), \ldots$ i dator? Svar:

Sats 3.18. (Tabellmetoden) Tag ett slumptal ξ mellan 0 och 1 och sätt

$$X = \begin{cases} x_1 \text{ om} & 0 \le \xi < f(x_1) \\ x_2 \text{ om} & f(x_1) \le \xi < f(x_1) + f(x_2) \\ x_3 \text{ om} & f(x_1) + f(x_2) \le \xi < f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{cases}.$$

Bevis. Sannolikheten att $\sum_{i=1}^{k-1} f_X(x_i) \le \xi < \sum_{i=1}^{k} f_X(x_i)$ är $f_X(x_k)$. $\square$

Ovan är ξ egentligen en sk. kontinuerlig stokastisk variabel som är likformigt fördelad över intervallet $[0, 1]$: detta lär jag er om i nästa kapitel 4.