MVE090 Matematisk statistik Z

Tentamen fredag den 4 juni 2021 kl 14.00 – 18.00

Lärare: Patrik Albin 031 7723512 palbin@chalmers.se .

Alla hjälpmedel är tillåtna. (Se Canvas kursen "Ordinarie tentamen Modul: 0106, MVE090" för förtydligande av regler.)

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras.

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5. **Lycka till!**

1. I dator kan man programmera tärningar med godtyckligt (positivt heltal) antal olika sidor n som har sannolikhet $1/n$ vardera vid (dator-) kast med tärningen. En teknolog kastar n stycken datortärningar med n sidor 100 gånger. Hur stort måste n vara för att sannolikheten att i minst två av de 100 försöken få samma resultat för alla de n kastade tärningarna skall vara mindre än 0.001? **(5 poäng)**

2. Låt X, Y och Z vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med väntevärden $E[X] = 1$, $E[Y] = 1/2$ och $E[Z] = 1/3$. Beräkna sannolikheten $P[X \leq Y, X \leq Z]$. **(5 poäng)**

3. Låt (X, Y) vara en 2-dimensionell stokastisk variabel med frekvensfunktion $f_{X,Y}(x, y) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-xy+y^2)}$ för $x, y \in \mathbb{R}$ där $C > 0$ är en konstant sådan att $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = 1$. Beräkna den betingade frekvensfunktionen $f_{X|Y}(x|y) = f_{X|y}(x)$. **(5 poäng)**

4. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara observationer av en stokastisk variabel X med frekvensfunktion $f_X(x) = \frac{1}{2\beta}\,\mathrm{e}^{-|x-\mu|/\beta}$ för $x \in \mathbb{R}$ där $\mu \in \mathbb{R}$ och $\beta > 0$ är parametrar med okända värden. Finn väntevärdesriktiga skattningar av μ och β^2. **(5 poäng)**

5. Kal och Ada önskar att utanför Ullevi stadium vid ett derby mellan GAIS och IFK testa om det finns någon skillnad mellan hur sluga de båda lagens supportrar är genom fråga dem en och en om fem myror är fler än fyra elefanter. Hjälp Kal och Ada genom förklara för dem hur det erhållna statistiska datamaterialet skall användas för att genomföra testen. **(5 poäng)**

6. Förklara varför det i linjär regression blir olika konfidensintervall för de båda storheterna $\mu_{Y|x}$ och $Y|x$. **(5 poäng)**

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 4 juni 2021

1. $\binom{100}{0}(1-n\cdot n^{-n})^{100}+\binom{100}{1}(1-n\cdot n^{-n})^{99}\cdot n\cdot n^{-n}>0.999$ ger $n\geq 6$.

2.

$$
\begin{aligned}
&P[X\leq Y,\, X\leq Z]\\
&= \int\int\int_{\{x,y,z\geq 0\,:\, x\leq y,\, x\leq z\}} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dxdydz\\
&= \int\int\int_{\{0\leq x\leq y\leq z\}} f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)\,dxdydz + \int\int\int_{\{0\leq x\leq z\leq y\}} f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)\,dxdydz\\
&= \int_{y=0}^{y=\infty}\int_{x=0}^{x=y}\int_{z=y}^{z=\infty} 6\,\mathrm{e}^{-x-2y-3z}\,dzdxdy + \int_{z=0}^{z=\infty}\int_{x=0}^{x=z}\int_{y=z}^{y=\infty} 6\,\mathrm{e}^{-x-2y-3z}\,dydxdz = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

3. Det gäller att

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-xy+y^2)}\,dx = C\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}y)^2}\,dx\times \mathrm{e}^{-\frac{3}{8}y^2}=D\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{8}y^2}$$

där $D>0$ är en konstant sådan att $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy=1$. Det följer att

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=(C/D)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2-xy+y^2)}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{8}y^2}=(C/D)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}y)^2}.$$

Mao. är $f_{X|Y}(x|y)$ frekvensfunktionen för en normalfördelning med $\mu=\frac{1}{2}y$ och $\sigma^2=1$.

4. Det är klart att $E[X]=\mu$. Vidare är

$$\mathrm{Var}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\,\frac{1}{2\beta}\,\mathrm{e}^{-|x-\mu|/\beta}\,dx=\int_0^{\infty}x^2\,\frac{1}{\beta}\,\mathrm{e}^{-x/\beta}\,dx=2\,\beta^2,$$

ty andramomentet av en exponentialfördelning. Det följer att vi väntevärdesriktigt kan skatta $\hat{\mu}=\bar{X}$ och $\hat{\beta}^2=\frac{1}{2}S^2$.

5. Se boken Milton & Arnold avsnitt 9.4.

6. Se boken Milton & Arnold avsnitt 11.3.