MVE090 Matematisk statistik Z

Tentamen fredag den 8 oktober 2021 kl 8.30 – 12.30

Motiveringar: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

Betygsgränser: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5. **Lycka till!**

1. Man kastar $n \geq 4$ stycken n-sidiga likadana men oberoende av varandra tärningar där för varje tärning sannolikheten är $1/n$ för vart och ett av de möjliga utfallen $\{1, 2, \ldots, n\}$. Bestäm sannolikheten för följande version av "full house" (kåk): k tärningar visar en och samma siffra medan $n-k$ tärningar visar en annan (en och samma) siffra för godtyckligt $k \in \{2, \ldots, n-2\}$. **(5 poäng)**

2. Låt X vara standard normalfördelad. Bestäm felintensiteten (="hazard rate") för den stokastiska variabeln $Y = X^2$. **(5 poäng)**

3. Beräkna $P[X > Y]$ då X är exponentialfördelad med väntevärde 1 och Y Poissonfördelad med väntevärde 1 samt X och Y är oberoende. **(5 poäng)**

4. Låt $x_1, \ldots, x_m$ vara oberoende observationer av en hypergeometriskt fördelad stokastisk variabel X med parametrar $N \in \{1, 2, \ldots\}$, $n \in \{1, \ldots, N\}$ och $r \in \{0, \ldots, N\}$. Förutsatt att N och n har kända värden medan r är okänd, ange en väntevärdesriktig skattning av r. Vad är skattningens varians? **(5 poäng)**

5. Utanför Nya Ullevi fotbollsstadion önskar en teknolog testa huruvida IFK-supportrars vikt har större varians än GAIS-supportrars. Förklara för teknologen hur testen skall genomföras. **(5 poäng)**

6. Låt $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ vara oberoende obeservationer av en bivariat normalfördelad stokastisk variabel (X, Y). Hur kan man testa huruvida korrelationskoefficienten $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}}$ är lika med $1/2$ eller ej? **(5 poäng)**

MVE090 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 8 oktober 2021

1. $\cancel{\sum_{k=2}^{n-2}\binom{n}{2}\binom{n}{k}(1/n)^n}$. $\sum_{k=2}^{n-2} n(n-1)\binom{n}{k}(1/n)^n$.

2. Med $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2}$ och $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)\,dy$ betecknande frekvensfunktionen respektive fördelningsfunktionen för standard normalfördelningen gäller att $f_Y(y)=\frac{d}{dy}P[Y\le y]=\frac{d}{dy}P[-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}]=\frac{d}{dy}P[X\le\sqrt{y}]-\frac{d}{dy}P[X\le-\sqrt{y}]=\frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})+\frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(-\sqrt{y})=\frac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})$ och $F_Y(y)=\int_0^y f_Y(x)\,dx=2\Phi(\sqrt{y})-1$ så att $\rho_Y(y)=f_Y(y)/(1-F_Y(y))=\frac{1}{2\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})/(1-\Phi(\sqrt{y}))$.

3. $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{x=k}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}\frac{1^k}{k!}\mathrm{e}^{-1}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k}\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}\,dx=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}-1}$.

4. Eftersom $E[X]=nr/N$ är $\hat{r}=N\bar{x}/n$ väntevärdesriktig med varians $(N/n)^2\,\mathrm{Var}[\bar{X}]=(N/n)^2\,\mathrm{Var}[X]/m=\frac{r\,(N-r)\,(N-n)}{m\,n\,(N-1)}$.

5. Se avsnitt 10.2 i boken.

6. Se avsnitt 11.6 i boken.