

MVE091 Matematisk statistik Z

Tentamen onsdag den 5 januari 2022 kl 8.30 – 12.30

LÄRARE OCH JOUR VIA TELEFON: Patrik Albin 031 7723512.

HJÄLPMEDEL: Beta eller häftet *Tommy Norberg: Formler och tabeller till matematisk statistik på universitet och tekniska högskolor* eller fyra handskrivna A4-sidor (xerox-kopior, datautskrifter etc. är ej tillåtna) – endast ett av dessa tre hjälpmedel är alltså tillåtet och eleven väljer själv vilket alternativ den vill använda (innan tentan börjar).

MOTIVERINGAR: alla svar och lösningar skall motiveras såvida inget att anges.

BETYGSGRÄNSER: 12, 18 resp. 24 poäng för betyg 3, 4 resp. 5. **Lycka till!**

1. Man kastar $n \geq 2$ stycken n -sidiga likadana men oberoende av varandra tärningar där för varje tärning sannolikheten är $1/n$ för vart och ett av de möjliga utfallen $\{1, 2, \dots, n\}$. Bestäm sannolikheten för att de n tärningarna visar precis $n - 1$ olika utfall (/antal prickar). **(5 poäng)**

2. Moden m för en kontinuerlig stokastisk variabel X är det värde $x = m$ för vilket frekvensfunktionen $f_X(x)$ är maximal. Medianen M är det värde för vilket $\int_{-\infty}^M f_X(x) dx = 1/2$. Ge exempel på tre frekvensfunktioner där $M < m$ för den första, $M = m$ för den andra och $M > m$ för den tredje. **(5 poäng)**

3. Visa att $\cos(\Theta)$ och $\sin(\Theta)$ är okorrelerade stokastiska variabler som ej är oberoende för Θ en likformigt fördelad stokastisk variabel över $[0, 2\pi]$. **(5 poäng)**

4. Låt $x_1, \dots, x_m$ vara oberoende observationer av en binomialfördelad stokastisk variabel X med parametrar $n \in \mathbb{N}$ och $p \in (0, 1)$ där n är känd medan p är okänd. Bestäm maximum likelihood-skattningen av p . **(5 poäng)**

5. Utanför Nya Ullevi fotbollsarena önskar en teknolog göra ett konfidensintervall för kvoten mellan varianserna för vikten av IFK-supportrar och GAIS-supportrar. Förklara för teknologen hur hen skall göra och vilka antaganden som krävs för detta.

(5 poäng)

6. Låt $Y_1, \dots, Y_n$ vara oberoende normalfördelade stokastiska variabler med väntevärden $\alpha + \beta x_1, \dots, \alpha + \beta x_n$ och varians σ^2 där $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och $\sigma^2 > 0$ är parametrar med okända värden medan $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ är kända tal. Hur kan man hypotestesta hypotesen $H_0 : \beta = 1$ mot alternativet $H_1 : \beta \neq 1$? **(5 poäng)**

MVE091 Matematisk statistik Z

Lösningar till tentamen den 5 januari 2022

1. $\binom{n}{2} \cdot n! \cdot (1/n)^n$
2. $f_X(x) = 2x$ för $x \in [0, 1]$, $f_{N(0,1)}(x)$ och $f_{\exp(1)}(x)$.
3. Av symmetriskäl är $\mathbf{E}\{\cos(\Theta)\} = \mathbf{E}\{\sin(\Theta)\} = 0$ medan $\mathbf{E}\{\cos(\Theta)\sin(\Theta)\} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \sin(2\theta) d\theta = 0$ så att $\mathbf{Cov}\{\cos(\Theta), \sin(\Theta)\} = 0$. $\cos(\Theta)$ och $\sin(\Theta)$ är ej oberoende ty $\mathbf{P}\{\cos(\Theta) < 1/\sqrt{2}\} = \mathbf{P}\{\sin(\Theta) < 1/\sqrt{2}\} = 1/2$ medan $\mathbf{P}\{\cos(\Theta) < 1/\sqrt{2}, \sin(\Theta) < 1/\sqrt{2}\} = 0$ enligt trigonometriska ettan.
4. Likelihood-funktionen är $L(p) = \prod_{i=1}^m f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^m \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i}$ så att $L'(p) = \left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{p} - \frac{mn - x_1 - \dots - x_m}{1-p} \right) L(p)$ som är noll för $p = \frac{x_1 + \dots + x_m}{mn} = \bar{X}/n$ vilket är maximum likelihood-skattningen av p .
5. Använd Theorem 10.2.1 i boken.
6. Se sidan 395 i boken.