FACIT

Tentamen i matematisk statistik, Statistisk Kvalitetsstyrning, MSN320/TMS070

Lördag 2006-12-16, klockan 14.00-18.00
Lärare: Jan Rohlén

Uppgift 1 (3.5 p)

Se boken!

Uppgift 2 (3.5p)

Se boken!

Uppgift 3 (3p)

a-uppgiften

Partistorlek: N=12000
AQL=0.25%
General Inspection Level II

Tabell 14-4 ger för N=12000 kodbokstav M

Från tabeller 14-5 till 14-6 får vi följande provplaner:
Normal: n=315, acc=2, re = 3
Tightened: n=315, acc=1, re=2
Reduced: n=125, acc=1, re=3
Standard övergångsregler skall följas.

b-uppgiften

Se t.ex. Mongomery s.650 och 651. Det beror på hur mycket du kan lita på din leverantör och hur mogen och stabil tillverkningsprocessen är.

c-uppgiften

Fördelen med zero-defect plans är pedagogiskt. **Inga** fel är tillåtna.
Nackdelen är att det kan vara mycket tufft mot producenten, brant OC-kurva.

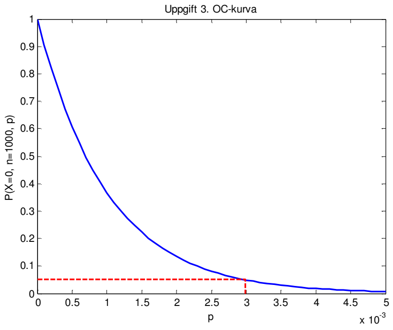
$$n = 1000$$

$$P(X = 0) = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} p_{ö}^{k} (1 - p_{ö})^{n-k} = (1 - p_{ö})^{n} = 0.05 \tag{1.1}$$

Lös ut $p_{ö}$:

$$p_{ö} = 1 - 0.05^{\frac{1}{n}} = 0.003$$

Ett 95% övre konfidensintervall är $p \le 0.003$.



(Det finns en tumregel som gäller generellt för nollplaner och 95% övre intervall: $p_ö \approx \frac{3}{n}$)

Uppgift 4 (3p)

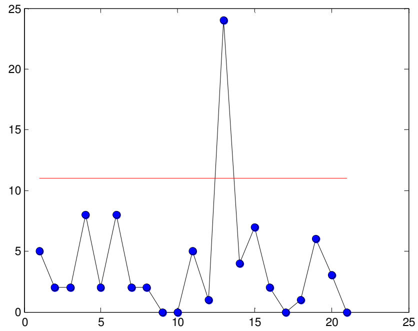
a-uppgiften
Det kan vara flera hål på en duk. Det är räknedata. Jag kommer använda ett diagram som bygger på Poissonfördelningen.
Jag antar att antalet hål X, per prov är $Poi(\lambda)$. Jag skattar λ från produktionsdata:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{21}\sum_{k=1}^{21} x_k = \frac{84}{21} = 4$$

Väljer $\alpha = 0.002$.

Poissontabellen ger att $P(X \le 11 \,|\, \lambda = 4) = 0.99908 > 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.999$. Väljer därför $UCL = 11$.

Poissontabellen ger att $P(X \le 0 \,|\, \lambda = 4) = 0.01832 > \frac{\alpha}{2} = 0.0001$. Väljer därför $LCL = 0$.



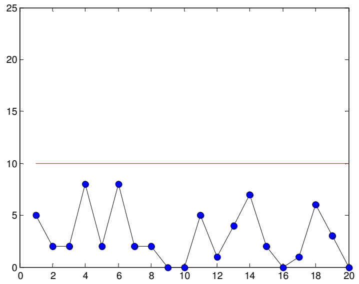
Vi ser att vi får ett larm för prov nummer 13. Texten ger oss att detta prov togs klockan 13.30 och att klockan 13.21 gick en säkring. Vi har en förklaring till den udda punkten och tar bort denna från styrdiagrammet och räknar ut nya gränser.

$$\hat{\lambda}^* = \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{20} x_k^* = \frac{60}{21} = 3$$

Poissontabellen ger att $P(X \le 10 \,|\, \lambda = 3) = 0.99971 > 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.999$. Väljer därför $UCL^* = 10$.

Poissontabellen ger att $P(X \le 0 \mid \lambda = 3) = 0.04979 > \frac{\alpha}{2} = 0.0001$. Väljer därför $LCL^* = 0$.

Den nya grafen blir:



b-uppgiften
Processen verkar nu vara i kontroll!

Uppgift 5 (3p)

Svar: $p = \Phi\left(-3C_{pk}\right) + \Phi\left(-3\left(2C_p - C_{pk}\right)\right)$

Härledning:

$$p = 1 - P\left(LSL \le X \le USL\right) = 1 - P\left(\frac{LSL-\mu}{\sigma} \le \underbrace{\frac{x-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} \le \frac{USL-\mu}{\sigma}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{LSL-\mu}{\sigma}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{USL-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

Om $\mu \le \frac{USL+LSL}{2}$ kan den första delen skrivas som

$$\Phi\left(\frac{LSL-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu-LSL}{\sigma}\right) = \Phi\left(-3\left(\frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right)\right) = \Phi\left(-3C_{pk}\right)$$

och den andra delen kan skrivas som

$$1-\Phi\left(\frac{USL-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu-USL}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu-LSL}{\sigma} + \frac{\mu-USL}{\sigma} - \frac{\mu-LSL}{\sigma}\right) =$$
$$\Phi\left(\frac{\mu-LSL}{\sigma} - \frac{USL-LSL}{\sigma}\right) = \Phi\left(3\underbrace{\left(\frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right)}_{C_{pk}} - 6\underbrace{\left(\frac{USL-LSL}{6\sigma}\right)}_{C_p}\right) = \Phi\left(-3\left(2C_p - C_{pk}\right)\right)$$

Symmetri ger samma resultat för $\mu > \frac{USL+LSL}{2}$.

Andelen utanför toleransgränserna blir då:

$$p = \Phi\left(-3C_{pk}\right) + \Phi\left(-3\left(2C_p - C_{pk}\right)\right) = \Phi\left(-3\cdot 1.33\right) + \Phi\left(-3\left(2\cdot 1.67 - 1.33\right)\right) =$$
$$\Phi\left(-3.99\right) + \Phi\left(-6.03\right) \approx 1 - 0.99997 + 0 = 3\cdot 10^{-5}$$

Uppgift 6 (5p)

Uppgift a:

Processens standardavvikelse kan beräknas från

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{MR}}{d_2} = \frac{1}{d_2} \frac{\sum_{i=1}^{19} MR_i}{19} = \frac{1}{1.128} \frac{448}{19} = 20.9$$

Uppgift b:

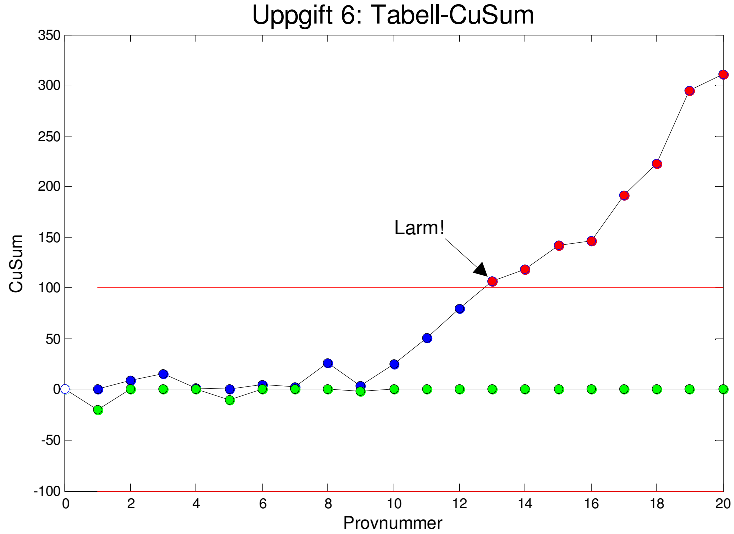
Som det var sagt vid tentatillfället är det tillåtet att räkna med $\sigma = 20$ istället.

$$H = h\sigma = 5 \cdot 20 = 100$$

$$K = k\sigma = 0.5 \cdot 20 = 10$$

Cusumtabellen blir

Provnr	x_i	$x_i - 2510$	C_i^+	N^+	$2490 - x_i$	C_i^-	N^-
1	2470	−40	0	0	20	20	1
2	2519	9	9	1	−29	0	0
3	2516	6	15	2	−26	0	0
4	2497	−13	2	3	−7	0	0
5	2480	−30	0	0	10	10	1
6	2515	5	5	1	−25	0	0
7	2508	−2	3	2	−18	0	0
8	2533	23	26	3	−43	0	0
9	2488	−22	4	4	2	2	1
10	2531	21	25	5	−41	0	0
11	2536	26	51	6	−46	0	0
12	2539	29	80	7	−49	0	0
13	2537	27	107	8	−47	0	0
14	2522	12	119	9	−32	0	0
15	2533	23	142	10	−43	0	0
16	2515	5	147	11	−25	0	0
17	2555	45	192	12	−65	0	0
18	2541	31	223	13	−51	0	0
19	2582	72	295	14	−92	0	0
20	2526	16	311	15	−36	0	0



Processen är ej i kontroll. Vi får ett larm för prov 13!

Uppgift c:
Förändringen har inträffat vid tidpunkten 13-8=5.
Det nya medelvärdet kan skattas till:

$$\hat{\mu} = \mu_0 + K + \frac{C_{20}^{+}}{N_{20}^{+}} = 2500 + 10 + \frac{311}{15} = 2530.7$$

Uppgift 7 (4p)

Uppgift a:
Parametrarna skattas

$$\hat{\mu} = \overline{x} = \frac{445.27}{25} \approx 17.81$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{s}}{c_4} = \frac{1}{0.9754}\frac{72.95}{25} \approx 2.99$$

Observera att vi använder s-metoden och ej R-metoden eftersom stickprovsstorleken n=11 är stor och vi tappar i effektivitet om R används.

Uppgift b:
Ett lämpligt styrdiagram är $\overline{x} - s$ Shewhart diagram. (Man kan även välja t.ex. Cusum eller EWMA också om man vill upptäcka små ändringar i medevärdet.)
Väljer $\alpha = 0.27\%$
Styrgränser för x-diagramet:

$$UCL = \hat{\mu} + 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 17.81 + 3 \cdot \frac{2.99}{\sqrt{11}} = 20.51$$

$$CL = \hat{\mu} = 17.81$$

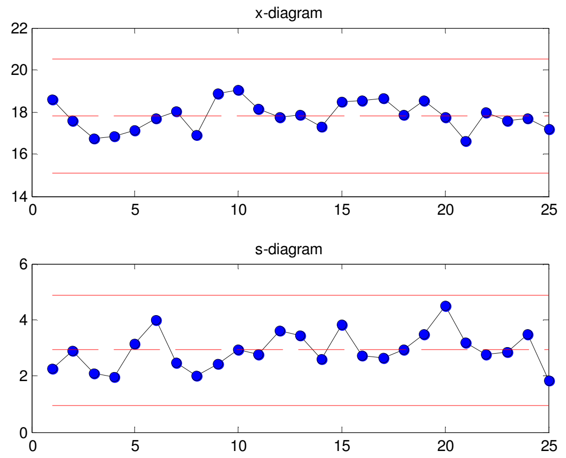
$$LCL = \hat{\mu} - 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = 17.81 - 3 \cdot \frac{2.99}{\sqrt{11}} = 15.11$$

Styrgränser för s-diagramet:

$$UCL = B_4\overline{s} = 1.679 \cdot \frac{72.95}{25} = 4.90$$

$$CL = \overline{s} = 2.92$$

$$LCL = B_3\overline{s} = 0.321 \cdot \frac{72.95}{25} = 0.94$$



Vi har inga larm!

Uppgift c:
Specifikationsgränserna är 18 ± 10. Är processen kapabel?
Bägge styrdiagramen indikerar att processen är stabil.
I uppgiftstexten anges att data är normalfördelade och oberoende. Vi kan därför använda följande kapabilitetsindex:

$$\hat{C}_p = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} = \frac{20}{6 \cdot 2.99} \approx 1.12$$

$$\hat{C}_{pk} = \min\left(\frac{USL - \hat{\mu}}{3\hat{\sigma}}, \frac{\hat{\mu} - LSL}{3\hat{\sigma}}\right) = \frac{17.81 - 8}{3 \cdot 2.99} \approx 1.09$$

Processen är inte helt kapabel. Ofta kräver man index på 1.33 eller högre.

Uppgift 8 (5p)

Uppgift a:
Volymen för cylindern är $V = \pi r^2 h$

$$\sigma_V^2 \approx \left(\frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{\mu_r,\mu_h}\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\bigg|_{\mu_r,\mu_h}\right)^2 \sigma_h^2 =$$

$$= \left(2\pi\mu_r\mu_h\right)^2 \sigma_r^2 + \left(\pi\mu_r^2\right)^2 \sigma_h^2 =$$

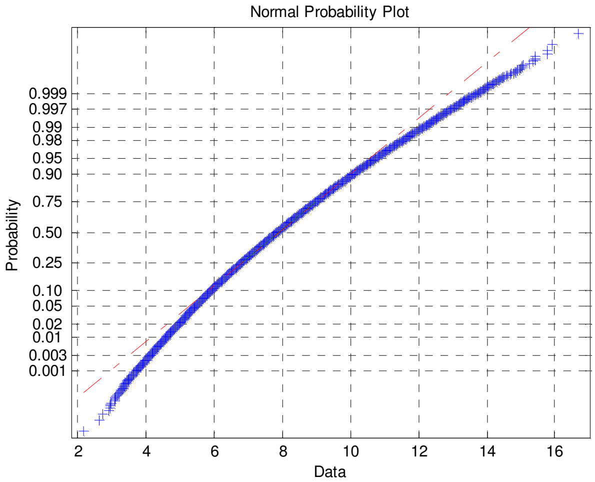
$$= \left(2\pi \cdot 1.0 \cdot 2.5\right)^2 \cdot 0.1^2 + \left(\pi \cdot 1.0^2\right)^2 \cdot 0.1^2 = 2.566$$

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_V^2} = \sqrt{2.566} \approx 1.60$$

Uppgift b:

$$C_p = \frac{9.8 - 5.8}{6 \cdot 1.60} \approx 0.42$$

Processen är ej duglig. (Normalappoximationen är fungerar ganska bra ändå. Lite utanför tentan, men Figur 1 visar att modellen fungerar hyggligt).



Figur 1 Normalfördelningsplot

Uppgift c:

Hur skall man förbättra processen?
Studera bidragen från varje maskin för sig:

Svarven (radien): $\left(2\pi\mu_r\mu_h\right)^2\sigma_r^2 = 2.47$

Sågen (höjden) : $\left(\pi\mu_r^2\right)^2\sigma_h^2 = 0.098$

Det är uppenbart att vi bör byta ut svarven före sågen.