Tentamen
MVE300 Sannolikhet, statistik och risk

2016-08-16 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 0706-985223
031-7723546

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 36 poäng.

---

1. (6p) Kasta två vanliga sexsidiga tärningar.

(a) Vad är sannolikheten att de två poängtalen är lika?

(b) Vad är den betingade sannolikheten att poängtalen är lika givet att summan är 10?

(c) Låt Y vara absolutbeloppet av skillnaden mellan poängtalen. Beräkna väntevärdet av Y.

Lösning. Utfallsrummet är $\{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$ och har alltså 36 olika utfall. Vi har att $A = \{\text{De två poängtalen lika}\} = \{(1,1),(2,2,\ldots,(6,6)\}$, som har sex utfall och alltså har sannolikheten $6/36 = 1/6$. I (b) söks $\mathbb{P}(A|B)$ där B är händelsen att summan är 10.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}.$$

Del (c): Vi har att $\mathbb{P}(Y=0) = 6/36 = 1/6$, $\mathbb{P}(Y=1) = 10/36 = 5/18$, $\mathbb{P}(Y=2) = 8/36 = 2/9$, $\mathbb{P}(Y=3) = 6/36 = 1/6$, $\mathbb{P}(Y=4) = 4/36 = 1/9$ och $\mathbb{P}(Y=5) = 2/36 = 1/18$. Väntevärdet är

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=0}^{5} k\mathbb{P}(Y=k) = \frac{1}{6}(10+16+18+16+10) = \frac{35}{18}.$$

2. (5p) Låt X vara en stokastisk variabel som har täthetsfunktionen

$$f(x) = Ke^{x-1},\ 1 < x < 3.$$

(a) Bestäm konstanten K.

(b) Beräkna väntevärdet av X.

Lösning. Eftersom integralen av tätheten måste vara 1 och

$$\int_1^3 e^{x-1}dx = e^2 - 1$$

Är $K = (e^2-1)^{-1}$. Vidare är $\mathbb{E}[X] = \int_1^3 xe^{x-1}dx = 2e^2$ genom partiell integration. Därmed är

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2e^2}{e^2-1}.$$

3. (6p) Paret (X, Y) av stokastiska variabler har täthetsfunktionen

$$f(x,y) = \frac{5}{4} - xy,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1.$$

(a) Bestäm marginalfördelningarna för X och Y.

(b) Bestäm kovariansen för (X, Y).

(c) Är X och Y oberoende?

Lösning. Vi har att

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \left(\frac{5}{4} - xy\right) dy = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x.$$

Helt analogt är $f_Y(y) = 5/4 - y/2$. Därmed är

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x)dx = \frac{11}{24}$$

och $\mathbb{E}[Y] = 11/24$. Vidare är

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy(\frac{5}{4} - xy)dx\, dy = \frac{29}{144}.$$

Därmed är

$$\mathbb{C}\text{ov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = -\frac{5}{572}.$$

Eftersom kovariansen inte är 0 är X och Y inte oberoende.

4. (6p) Ett jordbruk släpper ut nitrat i ett närliggande vattendrag. Vid en undersökning av floden mäts nitrathalten vid ett antal platser nedströms från jordbruket med resultaten

Avstånd (meter)	0	200	400	600	900
Nitrathalt (mg/l)	50	39	41	32	28

(a) Gör en regression under antagandet att nitrathalten avtar linjärt med avståndet från jordbruket samt att avvikelserna från linjen kan antas vara normalfördelade med konstant varians. Skatta parametrarna i modellen. Kom ihåg att

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right).$$

(b) Gör ett 95% konfidensintervall för lutningen hos regressionslinjen.

(c) En badplats ligger 750 meter nedströms jordbruket. Gör ett 90% för vad nitrathalten är vid badplatsen.

Lösning. Efter lite räknande kommer man fram till att $S_{xx} = 48800$, $S_{xy} = -11200$ och $S_{yy} = 290$. Således blir

$$s = \sqrt{290 - \frac{11200^2}{48800}} = 3.14.$$

I den vanliga linjära regressionsmodellen $Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$ gäller att ML-skattningarna av a och b ges av

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}},\ \hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{x}.$$

Detta ger $\hat{b} = -0.023$ och $\hat{a} = 47.64$ och således den skattade regressionslinjen

$$y = 47.64 - 0.023x.$$

Symmetriskt 95% konfidensintervall för b ges av

$$b = \hat{b} \pm F_{t_3}^{-1}(0.975)s/\sqrt{S_{xx}} = -0.023 \pm 3.18 \cdot 3.14/\sqrt{S_{xx}} = -0.023 \pm 0.015.$$

Slutligen gäller för en ny observation (x, Y) att prediktionsintervallet av grad 90 % ges av

$$Y = \hat{a} + \hat{b}x \pm F_{t_3}^{-1}(0.95)s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \overline{x})^2}{S_{xx}}}$$

vilket med $x = 750$ och $n = 5$ blir

$$Y = 29.8 \pm 2.35 \cdot 3.14 \cdot \sqrt{\frac{6}{5} + \frac{750 - 420}{48800}} = 29.8 \pm 8.1.$$

5. (6p) Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en fördelning som har fördelningsfunktionen

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^{\mu}},\ x > 0$$

där $\mu > 0$ är en okänd parameter. Finn ML-skattningen $\hat{\mu}$ av μ. Bestäm också om denna skattning är väntevärdesriktig.

Lösning. Genom att derivera fördelningsfunktionen fås att tätheten är

$$f(x) = \frac{\mu}{(x+1)^{\mu+1}}.$$

Likelihood för stickprovet blir då

$$L(\mu; x_1, \ldots, x_n) = \frac{\mu^n}{\prod_i (1 + x_i)^{\mu+1}}.$$

Med $l = \ln L$ får vi

$$l(\mu; x_1, \ldots, x_n) = n \ln \mu - (\mu + 1) \sum_i \ln(1 + x_i).$$

Genom att derivera och sätta till 0 får vi

$$\frac{n}{\mu} - \sum_i \ln(1 + x_i) = 0$$

vilket ger

$$\hat{\mu} = \frac{n}{\sum_i \ln(1 + X_i)}.$$

Skattningen är inte väntevärdesriktig. För att se detta, ta till exempel $n = 1$ och antag att $\mu = 1$. Då är

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x)dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x}dx = \infty.$$

6. (5p) Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en fördelning som har fördelningsfunktionen $F(x)$. Den empiriska fördelningsfunktionen givet stickprovet ges av

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i \leq x\}}.$$

Antag att $n = 400$ och att $\hat{F}(7.3) = 0.34$.

(a) Hur många observationer X_i gjordes det sådana att $X_i \leq 7.3$?

(b) Gör ett approximativt 99% uppåt begränsat konfidensintervall för $F(7.3)$.

Lösning. Del (a): Det betyder helt enkelt att andelen observationer som är högst 7.3 är 0.34. Med totalt 400 observationer betyder detta att antal sådana observationer är 136. För del (b), låt Y vara just antal observationer som är högst 7.3. Innan observationerna är gjorda är Y binomialfördelad med parametrar 400 och p där $p = F(7.3)$. Vi ska alltså göra ett konfidensintervall för p. Det gäller som bekant att $(\overline{Y} - p)/\sqrt{\overline{Y}(1-\overline{Y})/n}$ är approximativt standardnormalfördelad, vilket leder till konfidensintervallet

$$p \leq \overline{Y} + \Phi^{-1}(0.99)\sqrt{\frac{\overline{Y}(1-\overline{Y})}{n}} = 0.34 + 2.33\sqrt{0.34 \cdot 0.66/400} = 0.395.$$

7. (6p) Ett stickprov på en okänd kontinuerlig fördelning gav de tio observationerna -14, 3, -7, -2, 8, 18, -6, -5, -8, 10.

(a) Gör ett parameterfritt test av nollhypotesen $m = 0$ på 5% signifikansnivå utan att göra några som helst antaganden om den okända fördelningen. (Här är m medianen för fördelningen.)

(b) Antag att data kommer från en symmetrisk fördelning (så att m också är väntevärdet). Gör återigen att test av $m = 0$ med lämplig testfunktion. Signifikansnivå 5%.

Lösning. I del (a) är det endast ett teckentest som är lämpligt. Låt X vara antalet positiva observationer. Under H_0 är X binomialfördelad med parametrar 10 och 1/2. Avvikelser från $X = 5$ tyder på att $m \neq 0$. Nu observerade vi att $|X - 5| = 1$, så testet p-värde blir $1 - \mathbb{P}_{H_0}(|X-5| = 0) = 0.51$, så nollhypotesen kan verkligen inte förkastas. I del (b) kan vi använda ett Wilcoxon signed rank test. Testfunktionen är $W = \sum_{i:X_i>0} R_i$ där R_i är rangen av observation i. I vårt fall observerades $W = 26.5$ och enligt tabell skall man förkasta H_0 om $W \leq 9$ eller $W \geq 46$, vilket inte är fallet, så vi kan inte förkasta.

(I själva verket stämmer observationerna väldigt väl men $m = 0$; ett minustecken föll bort på tesen, så observationen 18 skulle varit -18. :) Detta skulle minskat p-värdena betydligt men inte tillräckligt för att förkasta.)

8. (6p) Att en stokastisk variabel Y har en betafördelning med parametrar a och b (positiva), skrivet $Y \sim \beta(a, b)$, betyder Y är kontinuerlig med täthetsfunktionen

$$f_Y(y) = Cy^{a-1}(1-y)^{b-1},\ 0 < y < 1,$$

där C är en normaliserande konstant. Gör först en observation $Y = y$ under àpriorifördelningen $\beta(a, b)$ och låt sedan X vara binomialfördelad med parametrar n och y. Bestäm àposteriorifördelningen för Y givet att $X = k$. I fallet $n = 2$ och $k = 2$, beräkna väntevärdet i àposteriorifördelningen.

Lösning. Vi har att $f_{Y|X}(y|k)$ är proportionell mot

$$f_{X|Y}(k|y)f_Y(y) = y^k(1-y)^{n-k}y^{a-1}(1-y)^{b-1} = y^{a+k-1}(1-y)^{b+n-k-1}$$

vilket vi känner igen som en $\beta(a+k, b+n-k)$-fördelning. När $n = k = 2$ blir àposteriotätheten $Cy^2 = 3y^2$ och väntevärdet är $\int_0^1 3y^3 dy = 3/4$.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101