Tentamen
MVE300 Sannolikhet, statistik och risk

2016-10-07 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 0706-985223
031-7723546

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 36 poäng.

---

1. (6p) En urna innehåller sex röda och fyra gröna bollar. En annan urna innehåller åtta röda och två gröna bollar. Man tar först på måfå en boll ur den första urnan och stoppar i den andra. Sedan väljs på måfå en boll ur den andra urnan och läggs i den första. Vad är sannolikheten att

(a) man flyttar en röd boll vid bägge tillfällena?

(b) man efter de två förflyttningarna har lika många röda bollar i bägge urnorna?

Lösning. Låt A vara händelsen att den första flyttade bollen är röd och B vara händelsen att den andra flyttade bollen är röd. I (a) söker vi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \frac{6}{10}\frac{9}{11} = \frac{27}{55}.$$

I del (b) ska vi beräkna

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c) = \frac{4}{10}\frac{8}{11} = \frac{16}{55}.$$

2. (6p) Antag att $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ är ett stickprov på en tvådimensionell stokastisk variabel (X, Y) och att $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[Y^2]$ och $\mathbb{E}[XY]$ alla är ändliga (så att varianserna och kovariansen är väldefinierade). Visa att

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_iY_i - \overline{X}\,\overline{Y})$$

är en väntevärdesriktig skattning av $\mathbb{C}\mathrm{ov}[X, Y]$.

Lösning. Vi har att

$$\sum_i (X_iY_i - \overline{X}\,\overline{Y}) = \sum_i X_iY_i - n\overline{X}\,\overline{Y}$$

som har väntevärde

$$n\mathbb{E}[XY] - n\mathbb{E}[\overline{X}\overline{Y}] = n(\mu_x\mu_y + \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) - (\mu_x\mu_y + \mathbb{C}\mathrm{ov}(\overline{X}, \overline{Y}))$$

där μ_x och μ_y är respektive väntevärde. Nu är ju

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(\overline{X}, \overline{Y}) = \frac{1}{n^2}\sum_i\sum_j \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i, Y_j) = \frac{1}{n}\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y).$$

Genom att lägga samman detta ser vi att

$$\mathbb{E}[\sum_i (X_i Y_i - \overline{X}\,\overline{Y})] = (n-1)\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$$

och uppgiften slutförs genom att dela med $n-1$.

3. (5p) Låt A och B vara två händelser med $\mathbb{P}(A) > 0$ och $\mathbb{P}(B) > 0$.

(a) Visa med ett motexempel att det inte är allmänt sant att $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$.

(b) Ange ett tillräckligt och nödvändigt villkor för att $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$.

Lösning. Ett motexempel: Slå två tärningar och låt A vara händelsen att summan av de två poängtalen är 2 och B händelsen att de två poängtalen är lika. Då är $\mathbb{P}(A|B) = 1/6$ medan $\mathbb{P}(B|A) = 1$. Allmänt gäller att

$$\frac{\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(B|A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

och vi ser att $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$ om och endast om $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

4. (6p) Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara en följd av oberoende slantsinglingar (dvs $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/2$).

(a) Beräkna väntevärde och varians av

$$Y = \min\{n : X_n = 1, X_{n-1} = 0\}.$$

(b) Beräkna väntevärde och varians av

$$Y = \min\{n : X_n = X_{n-1} = 1\}.$$

Lösning. I (a) är Y summan av två oberoende stokastiska variabler med $Geo(1/2)$-fördelning: antal kast till första nollan och antalet kast efter det till första ettan. Eftersom väntevärde och varians för sådana stokastiska variabler i allmänhet är p respektive $(1-p)/p^2$, är båda 2 i detta fall. Alltså är $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = 4$.

I del (b) kan man skriva $Y = G+X$ där G är antalet kast till första ettan, dvs $Geo(1/2)$, och X är 1 med sannolikhet $1/2$ och $1+Z$ med sannolikhet $1/2$, där Z har samma fördelning som Y själv. Detta ger, med $\mu = \mathbb{E}[Y]$

$$\mu = 2 + \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(1+\mu)$$

vilket ger $\mu = 6$. Observera också att detta betyder att $\mathbb{E}[X] = 4$. Låt nu $s = \mathbb{E}[Y^2]$. Vi har

$$s = \mathbb{E}[(G+X)^2] = \mathbb{E}[G^2 + 2GX + X^2].$$

Nu är ju $\mathbb{E}[G^2] = 6$, $\mathbb{E}[GX] = \mathbb{E}[G]\mathbb{E}[X] = 8$ och $\mathbb{E}[X^2] = 1/2 + (1/2)(1 + 2 \cdot 6 + s)$. Totalt ger detta $s = 58$ och därmed $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = 22$.

5. (6p) Visa med hjälp av centrala gränsvärdessatsen att för X Poissonfördelad med parameter λ gäller att

$$\mathbb{P}\left(\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \to \Phi(x)$$

för alla x då $\lambda \to \infty$. Använd sedan detta till att konstruera en approximativt normalfördelad testfunktion för att testa $H_0 : \lambda_x = \lambda_y$ mot $H_A : \lambda_x \neq \lambda_y$ då X och Y är oberoende och Poissonfördelade med parametrar λ_x respektive λ_y och man vet att $\lambda_x, \lambda_y > 1000$. I testfunktionens nämnare går det bra att ersätta λ_x med X och analogt för Y.

Lösning. Detta följer av centrala gränsvärdessatsen för att man (om λ är ett heltal) kan skriva $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ där X_i:na är oberoende och Poisson med parameter 1, och att en Poissonfördelad stokastisk variabel har väntevärde och varians båda lika med λ. Eftersom λ_x och λ_y är stora följer det att X och Y är oberoende och approximativt normala med väntevärde λ_x respektive λ_y och varians λ_x respektive λ_y. Alltså är $X - Y$ i då approximativt normal med väntevärde $\lambda_x - \lambda_y$ och varians $\lambda_x + \lambda_y$. Därför gäller approximativt att

$$\frac{X - Y - (\lambda_x - \lambda_y)}{\sqrt{\lambda_x + \lambda_y}} \sim N(0, 1).$$

Enligt uppgift går det bra att i nämnaren ersätta λ_x och λ_y med X och Y och under H_0 är $\lambda_x = \lambda_y$ så testfunktionen blir till slut

$$\frac{X - Y}{\sqrt{X + Y}}$$

och till exempel förkastar ett symmetrisk test nollhypotesen på signifikansnåva α om $|X - Y|/(\sqrt{X + Y}) \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$.

6. (5p) Låt U och V vara oberoende stokastiska variabler, likformigt fördelade på $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vad är sannolikheten att polynomet $x^2 + 2Ux + V$

(a) har reella nollställen?

(b) har endast ett nollställe (dvs en dubbelrot)?

Lösning. Lösning(arna) till ekvationen $x^2 + 2Ux + V = 0$ är

$$x = -U \pm \sqrt{U^2 - V}$$

som är reella(a) om $U^2 \geq V$. Utfallen med $U^2 < V$ är $(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$, dvs sju stycken av totalt 25 utfall, varför sannolikheten för reella lösningar är 18/25. En dubbelrot får man om $U^2 = V$, vilket sker för utfallen $(0, 0), (1, 1), (2, 4)$, så sannolikheten för en dubbelrot är 3/25.

7. (6p) Antag att X_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ är oberoende och och exponentialfördelade med parameter 1. Beräkna $\mathbb{E}[M]$ där $M = \min(X_{11} + X_{22}, X_{12} + X_{21})$.

(Detta är känt som det enklaste specialfallet av *the minimal assignment problem.*)

Lösning. Det gäller att $U = X_{11} + X_{22}$ och $V = X_{12} + X_{21}$ är oberoende och $\Gamma(2, 1)$-fördelade. Därmed gäller att $\mathbb{P}(U > x) = \mathbb{P}(V > x) = (x + 1)e^{-x}$ och $\mathbb{P}(M > x) = ((x + 1)e^{-x})^2 = (x + 1)^2 e^{-2x}$ och således

$$\mathbb{E}[M] = \int_0^\infty (x + 1)^2 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\left[(x + 1)^2\right]_0^\infty + \int_0^\infty (x + 1)e^{-2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[(x + 1)e^{-2x}\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-2x} dx = \frac{5}{4}.$$

8. (5p) Låt X och Y vara oberoende och exponentialfördelade med parameter 1 och sedan, givet $X = x$ och $Y = y$, låt Z vara $\Gamma(2, x + y)$-fördelad. Om man observerar $Z = z$, vad är den betingade fördelningen för $X + Y$?

Lösning. Det gäller att $W = X + Y$ är $\Gamma(2,1)$-fördelad och alltså har tätheten $f_W(w) = we^{-w}$, $w > 0$. Det gäller nu att

$$f_{W|Z}(w|z) = Cf_{Z|W}(z|w)f_W(w) = Cw^2ze^{-wz}we{-}w = Czw^3e^{-(z+1)w}$$

där $C = (\int_0^\infty f_W(w)dw)^{-1}$. Sånär som på Cz, som inte beror av w, känner vi igen högerledet som tätheten för $\Gamma(4, z+1)$, vilket alltså är den sökta betingade fördelningen.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101