

Tentamen

MVE301 Sannolikhet, statistik och risk

2018-10-12 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Olof Elias, telefon: 031-7725325

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 36 poäng.

1. (6p) Från en normalfördelning med väntevärde och varians μ och σ^2 har det dragits ett stickprov:

$$\mathbf{X} = (-0.11, -0.72, 0.81, -0.26, -0.53, 1.83, 0.08, 0.36)$$

- (a) Gör ett symmetriskt konfidensintervall av konfidensgrad 90 % under antagandet att σ^2 är okänd.
- (b) Gör nu samma sak men antag nu att det är känt att $\sigma^2 = 1$.
2. (a) (4p) För data (x_k, Y_k) , $k = 1, 2, 3, 4$ vill vi göra linjär regression enligt standardmodellen $Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$, där ϵ_k :na är oberoende och $N(0, \sigma^2)$ -fördelade. De data vi fick var $(20, 365)$, $(40, 220)$, $(60, 117)$ och $(80, 34)$. Skatta regressionslinjen $y = a + bx$ och gör ett 90% konfidensintervall för b . Kom ihåg att

$$s^2 = \frac{1}{n-2} \left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} \right).$$

- (b) (2p) Antag att man gjort en linjär regression och fått den skattade regressionslinjen $y = \hat{a} + \hat{b}x$ för data (x_k, y_k) , $k = 1, \dots, n$, där $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Sedan visar det sig att man läst fel på sista y -värdet och att y_n istället skulle vara y'_n där $y'_n > y_n$. Man får då den nya skattade regressionslinjen $y = \hat{a}' + \hat{b}'x$. Visa att $\hat{b}' > \hat{b}$.
3. (6p) Låt T vara en stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f_T(t) = C(1 - t^2), \quad t \in (0, 1).$$

Låt nu $X = T^2$ och $Y = \cos(\pi T)$. Bestäm konstanten C , beräkna väntevärdena för X och Y och $\text{Cov}(X, Y)$.

4. (5p) I en hatt ligger tre mynt, mynt 1, 2 och 3, som är sådana att de vid slantsingling ger klave med sannolikhet $1/10$, $1/20$ respektive $1/30$. Ett av mynten väljs på måfå och singlar n gånger och det visar sig att det inte blir någon klave alls. Bestäm den betingade sannolikheten givet detta, att det valda myntet var mynt i , $i = 1, 2, 3$.
5. (6p) En ishockeymatch spelas i tre perioder om vardera 20 minuter. Antag att målen i period 1 för respektive lag kommer som oberoende Poissonprocesser med parametrar 2 mål per timme för hemmalaget och $3/2$ mål per timme för bortalaget. I period 2 är motsvarande siffror 3 mål per timme respektive $5/2$ mål per timme och i period 3 är siffrorna 5 mål per timme respektive 4 mål per timme. Vad är förväntat totalt antal mål i matchen? Vad är sannolikheten att det blir totalt 6 mål? Vad är den betingade sannolikheten att hemmalaget vinner givet att det blir 6 mål?

(I en ishockeymatch blir det ibland förlängning för att utse en vinnare om resultatet är oavgjort vid full tid. Vi bortser från detta här och avser bara vad som sker under ordinarie tid.)

6. (5p) Låt X_1, X_2, \dots, X_n vara ett stickprov på en stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f_\theta(x) = \frac{2}{3}(x - \theta)^2, \quad x \in (\theta - 1, \theta + 1),$$

där θ en okänd parameter. Visa att ML-skattningen $\hat{\theta}$ av θ uppfyller

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x - \hat{\theta}} = 0.$$

Beräkna också $\hat{\theta}$ då $n = 3$ och observationerna var $1/4$, $1/2$ och $3/2$.

7. (5p) Betrakta en Bayesiansk modell där θ_1 och θ_2 är två parametrer som à priori väljs oberoende och båda enligt en $\beta(2, 1)$ -fördelning. Låt sedan, givet θ_1 och θ_2 , de stokastiska variablerna $X = (X_1, \dots, X_n)$ vara oberoende och sådana att $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = \theta_1 \theta_2$.

Beräkna, så när som på en proportionalitetskonstant, à posterioritätheten $f_{\theta_1, \theta_2 | X}(t_1, t_2 | x)$ för (θ_1, θ_2) givet ett utfall $x = (x_1, \dots, x_n)$ sådant att $\sum_{i=1}^n x_i = k$. Ange också MAP $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ av (θ_1, θ_2) , dvs de värden av (t_1, t_2) som maximerar denna à posterioritäthet.

8. (6p) Simulering av exponentialfördelning och Poissonfördelning utgående från likformig fördelning:

- (a) Låt X vara en stokastisk variabel som är likformigt fördelad på $(0, 1)$. Bestäm en funktion g sådan att $g(X)$ är exponentialfördelad med parameter λ .
- (b) Låt T_1, T_2, \dots vara oberoende och exponentialfördelade med parameter 1. Bestäm en funktion $h(T_1, T_2, \dots)$ sådan att $h(T_1, T_2, \dots)$ är Poissonfördelad med parameter λ .

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4.54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

s	2.5 % percentile								
	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

s	95 % percentile								
	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

s	97.5 % percentile								
	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n + 1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n + 1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n + 1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m + n + 1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101