Tentamen
MVE300 Sannolikhet, statistik och risk

2015-08-18 kl. 8.30-13.30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 0706-985223
031-7723546

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 20 poäng, för betyg 4 minst 30 poäng och för betyg 5 minst 40 poäng.

---

1. (5p) Antag att det i en urna ligger N stycken bollar, numrerade från 1 till N. Låt $n \leq N$ och välj på måfå ut n av de N bollarna. Låt Y vara det största talet som finns på någon av de valda bollarna. Beräkna frekvensfuntionen (pmf) för Y.

Lösning: Eftersom $Y \leq k$ om och endast om alla n bollar väljs bland de med nummer $1, \ldots, k$, gäller att

$$\mathbb{P}(Y \leq k) = \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}.$$

Därför blir

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}},\ n \leq k \leq N.$$

2. (6p) Antag att årsnederbörden i Göteborg är normalfördelad med väntevärde 800 (millimeter) och standardavvikelse 150. Vad är sannolikheten att det minst två år av tio kommer mer än 1000 mm nederbörd? Man kan anta att nederbörden olika år är oberoende.

Lösning: Låt X_i vara nederbörden år nummer i. Då har vi att $X_1, \ldots, X_{10}$ är oberoende och normalfördelade med $\mu = 800$ och $\sigma = 150$. Därför blir

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 1000) = \mathbb{P}(\frac{X_1 - 800}{150} \geq \frac{1000 - 800}{150}) = 1 - \Phi(1.33) = 1 - 0.908 = 0.092.$$

Låt nu Y vara antal år med mer än 1000 mm nederbörd. Då är $Y \sim \text{Bin}(10, 0.092)$. Alltså

$$\mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) = 1 - 0.908^10 - 10 \cdot 0.092 \cdot 0.908^9 \approx 0.23.$$

3. (6p) Låt X vara en stokastisk variabel med tätheten (density)

$$f(x) = 2x,\ 0 \leq x \leq 1.$$

Låt $Y = e^X$. Bestäm tätheten för Y och beräkna $\mathbb{E}[Y]$ och $\mathbb{V}\text{ar}[Y]$.

Lösning: Vi har att fördelningsfunktionen $F_X(x) = \int_0^x 2t\,dt = x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Alltså

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(e^X \leq x) = F_X(\ln x) = (\ln x)^2,\ 1 \leq x \leq e.$$

Genom att derivera fås

$$f_Y(x) = \frac{2 \ln x}{x},\ 1 \leq x \leq e.$$

Vi får då

$$\mathbb{E}[Y] = \int_1^e x f_Y(x) dx = 2\int_1^e \ln x \, dx = 2[x\ln x - x]_1^e = 2$$

och, enligt den omedvetne statistikerns lag

$$\mathbb{E}[Y^2] = 2\int_1^e x \ln x \, dx = [x^2 \ln x]_1^e - \int_1^e x \, dx = \frac{1}{2}(e^2+1)$$

och därmed

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] = \frac{1}{2}(e^2+1) - 2^2 = \frac{e^2-7}{2}.$$

4. (5p) Antag att X är exponentialfördelad med parameter β, där β själv antas vara en stokastisk variabel med exponentialfördelning med parameter 1 (dvs à-priorifördelningen för β är exp(1)). Bestäm à-posteriorifördelningen för β efter att ha observerat $X = x$.

Lösning: Vi har att

$$f_{\beta|X}(\beta|x) = C f_{X|\beta}(x|\beta) f_\beta(\beta) = C\beta e^{-\beta x} e^{-\beta} = C\beta e^{-(x+1)\beta},\ \beta > 0.$$

Nu är ju

$$\int_0^\infty \beta e^{-(x+1)\beta} d\beta = \frac{1}{(x+1)^2}$$

så

$$f_{\beta|X}(\beta|x) = (x+1)^2 \beta e^{-(x+1)\beta}$$

dvs givet $X = x$ är β gammafördelad med parametrar 2 och $x+1$.

5. Sannolikheten p att ett SJ-tåg ska vara försenat med mer än fem minuter, varierar från dag till dag, på grund av varierande förutsättningar. För att undersöka p en viss dag och testa $H_0 : p = 0.3$ mot $H_A : p > 0.3$ kontrollerades n ankomster och registrerades hur försenade dessa var.

(a) (3p) Antag att $n = 80$ och att man fann vid 30 av dessa var mer än fem minter sena. Bestäm approximativt testets p-värde. (Observera att p:et i ordet p-värde inte ska förväxlas med parametern p som man testar). Kan man förkasta H_0 på 5% signifikansnivå? Vilka antaganden gör du?

(b) (3p) Vad blir den approximativa styrkan (power) för $p = 0.5$ om man testar på 5% signifikansnivå? (Dvs om $p = 0.5$, vad sannolikheten att förkasta H_0?.)

Lösning: Vi antar att olika tågs förseningar är oberoende. Om vi observerar n tåg blir alltså antalet tåg, X, som är mer än fem minuter sena, binomialfördelat med parametrar n och p. Testet förkastar H_0 om X blir tillräckligt stort. Enligt CGS är $(X - np)/\sqrt{np(1-p)}$ approximativt standardnormalfördelad. Vi har $n = 80$ och under H_0 är $p = 0.3$. Alltså är $(X - np)/\sqrt{np(1-p)} \approx (X - 24)/4.1$ Vi får

$$\mathbb{P}_{H_0}(X \geq 30) = \mathbb{P}_{H_0}(\frac{X-24}{4.1} \geq \frac{6}{4.1}) = 1 - \Phi(1.46) = 1 - 0.93 = 0.07.$$

p-värdet är alltså 0.07 och vi kan inte förkasta H_0 på signifikansnivå 5 %.

För att beräkna styrkan ska vi beräkna sannolikheten att testet förkastar H_0 om $p = 0.5$. Testet förkastar H_0 om $X \geq k$ där k är valt så att

$$\mathbb{P}_{H_0}(X \geq k) = \mathbb{P}_{H_0}(\frac{X-24}{4.1} \geq \frac{k-24}{4.1}) = 0.05$$

vilket ger $(k-24)/4.1 = 1.96$, dvs $k = 32$. Om nu $p = 0.5$ blir $(X-40)/\sqrt{20}$ approximativt standardnormal, och då

$$\mathbb{P}(X \geq 32) = \mathbb{P}(\frac{X-40}{\sqrt{20}} \geq \frac{32-40}{\sqrt{20}}) = 1 - \Phi(-8/\sqrt{20}) \approx \Phi(1.79) \approx 0.96.$$

Styrkan är alltså ca 96 %.

6. En stokastisk variabel X sägs vara Paretofördelad med parameter θ om den har täthet (density)

$$f(x) = \frac{1}{\theta x^{1+1/\theta}},\ x \geq 1.$$

Antag att $x_1, \ldots, x_n$ är mätdata från att stickprov på en Paretofördelad stokastisk variabel.

(a) (2p) Bestäm ML-skattningen $\hat{\theta}$ av θ.

(b) (2p) Beräkna $\mathbb{E}[\ln X]$ som funktion av θ om X är fördelad enligt ovan.

(c) (2p) Är $\hat{\theta}$ väntevärdesriktig (unbiased)?

Lösning: Likelihooden är

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta x_i^{1+1/\theta}} = \frac{1}{\theta^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{1+1/\theta}}.$$

Ta logaritmen och få

$$\ln L = -n \ln \theta - (1 + \frac{1}{\theta}) \sum_i \ln x_i$$

vars derivata m.a.p. θ är $-n/\theta + (1/\theta^2) \sum \ln x_i$, som vi sätter till 0 och löser ut θ för att få

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_i \ln x_i.$$

För del (b):

$$\mathbb{E}[\ln X] = \int_1^\infty \ln x \frac{1}{\theta x^{1+1/\theta}} dx = [-\ln x \frac{1}{x^{1/\theta}}]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{x^{1+1/\theta}} dx$$
$$= \theta \int_1^\infty \frac{1}{\theta x^{1+1/\theta}} dx = \theta.$$

Nu följer raskt också att svaret i (c) är ja, eftersom

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\ln X_i] = \theta.$$

7. (10p)

(a) Vid ett idrottsinstitut utfördes ett prov för att utröna huruvida preparatet ORKAMER har någon prestationshöjande effekt hos idtrottsmän. Tio utvalda försökspersoner fick genomgå ett uthållighetsprov, där man mäter hur lång tid de orkade arbeta med en viss belastning. Därefter fick de under en vecka dagliga injektioner med ORKAMER, varpå provet upprepades. Man fick följande data.

Person	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Före	172.1	169.0	177.0	179.1	159.7	161.3	166.6	175.0	186.7	166.4
Efter	173.1	170.4	180.8	181.5	160.5	163.2	165.4	177.5	185.0	166.3

Avgör på fem procents signifikansnivå om ORKAMER hade någon prestationshöjande effekt. Man kan *inte* anta att data är normalfördelade. Man kan däremot anta att differenserna per individ mellan observationer efter och före injektionerna kommer från en symmetrisk fördelning.

Lösning: Vi har parvisa observationer $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{10}, Y_{10})$ där X_i är arbetstid före och Y_i arbetstid efter injektion. Skriv $D_i = Y_i - X_i$. Enligt uppgift kan vi anta att D_i:na kommer från en symmetrisk fördelning. Vi vill testa $H_0 : \mu = 0$ mot $H_A : \mu > 0$, där $\mu = \mathbb{E}[D_i]$. De uppmätta D_i:na blev

$$1.0, 1.4, 3.8, 2.4, 0.8, 1.9, -1.2, 2.5, -1.7, -0.1$$

Vi använder ett Wilcoxon signed rank test och låter teststatistikan vara W, rangsumman av de positiva observationerna i stickprovet av absoluta avvikelser från 0. Man förkastar om $W \geq C$, där $\mathbb{P}_{H_0}(W \geq C) \approx 0.05$. Enligt tabell ser att $C = 55 - 11 = 44$ och mätdata ger att $W = 44$, så vi kan (precis) förkasta H_0 på fem procents signifikansnivå.

(b) För att undersöka effekten av vitamin B1 på tillväxten hos svampar har man tillgång till elva svampar. Man väljer slumpmässigt ut sex av dessa till att ge vitamin B1 och fem stycken till en kontrollgrupp. Efter en tid mättes följande viktökningar upp.

Kontroll	18	14.5	13.5	23	24	
Vitamin B1	27	34	20.5	29.5	20	28

Avgör på fem procents signifikansnivå om vitamin B1 har någon skillnad i tillväxtbefrämjande effekt. Men kan inte heller här anta normalfördelning hos data. Man kan dock anta en translationsmodell, dvs att data från de två grupperna kommer från fördelningar med samma form men eventuellt olika läge.

Lösning: Enligt uppgift kan vi anta att de två stickproven kommer från två fördelningar F_1 och F_2 med samma form med eventuellt olika läge. Vi vill alltså testa $H_0 : F_1 = F_2$ mot $H_A : F_1 \neq F_2$. Det är lämligt att utföra ett Wilcoxon rangsummetest. De rangordnade data var, med kontrollgruppen understruken

$$\underline{13.5}, \underline{14.5}, \underline{18}, 20, 20.5, \underline{23}, \underline{24}, 27, 28, 29.5, 34$$

Vi använder teststatistikan W som är rangsumman av data från kontrollgruppen och förkastar om $W \leq c$ där $\mathbb{P}_{H_0}(W \leq c) \approx 0.05$. Enligt tabell med $m = 5$, $n = 6$ är $c = 21$. Data ger $W = 1 + 2 + 3 + 6 + 7 = 19$, så testet förkastar H_0 till förmån för H_A på fem procents signifikansnivå.

8. (6p) Antag att X har den momentgenererande funktionen $M(t)$. Låt $\Psi(t) = \ln M(t)$. Visa att

$$\Psi''(0) = \mathbb{V}\text{ar}[X].$$

Lösning: Det gäller att

$$\Psi'(t) = \frac{d}{dt} \ln M(t) = \frac{M'(t)}{M(t)}.$$

Derivera en gång till och få

$$\Psi''(t) = \frac{d}{dt} \frac{M'(t)}{M(t)} = \frac{M''(t)M(t) - M'(t)^2}{M(t)^2}.$$

Men nu är ju $M(0) = 1$ och $M'(0) = \mathbb{E}[X] = \mu$, så

$$\Psi''(0) = \frac{\mathbb{E}[X^2] - \mu^2}{1} = \mathbb{V}\text{ar}[X]$$

eftersom det ju allmänt gäller att $M^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101