Tentamen
MVE300 Sannolikhet, statistik och risk

2016-04-06 kl. 14:00-19:00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 0706-985223
031-7723546

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 20 poäng, för betyg 4 minst 30 poäng och för betyg 5 minst 40 poäng.

---

1. (6p) Två ishockeylag, lag A och lag B, spelar en matchserie om bäst av sju matcher, dvs den som vinner minst 4 matcher vinner matchserien. Antag att lag A vinner en given match med sannolikheten 0.6, oberoende för olika matcher. Vad är sannolikheten att A vinner matchserien?

   Lösning: Vi kan anta att alla sju matcher spelas oavsett om matchserien är avgjord innan dess eller ej. Låt X vara antal matcher som A vinner. Då är X binomialfördelad med parametrar 7 och 0.6. Vi söker

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{7} \binom{7}{k} 0.6^k 0.4^{7-k} \approx 0.71.$$

2. (6p) Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov (sample) på någon fördelning med ändlig varians. Visa att stickprovsvariansen

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

   är en väntevärdesriktig (unbiased) skattning av $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)$. Visa också att för stickprovsstandardavvikelsen s gäller att $\mathbb{E}[s] \leq \sigma$.

   Lösning: Det är lätt att se att $\sum_i (X_i - \overline{X})^2 = \sum_i X_i^2 - n\overline{X}^2$. Vi har

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \mu^2 + \sigma^2$$

   och

$$\mathbb{E}[\overline{X}^2] = \mathbb{E}[\overline{X}]^2 + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\overline{X}) = \mu^2 + \sigma^2/n.$$

   Summering ger

$$\mathbb{E}[\sum_i (X_i - \overline{X})^2] = (n-1)\sigma^2.$$

   Dividera nu med $n-1$ på bägge sidor för att slutföra argumentet.

3. (6p) Två mynt singlas. De två mynten är sådana att det första myntet visar klave med sannolikheten 1/3 och det andra myntet med sannolikheten 2/3. Om man får exakt en klave, vad är den betingade sannolikheten att det är det andra myntet som visar klave?

   Lösning: Låt $A_i = \{\text{mynt } i \text{ visar klave}\}$, $i = 1, 2$. Vi söker

$$\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 | (A_1^c\ A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)) = \frac{(2/3)^2}{(2/3)^2 + (1/3)^2} = \frac{4}{5}$$

   där den första likheten följer av att A_1 och A_2 kan antas vara oberoende.

4. (6p) Antag att Y är $N(X,1)$-fördelad, där X har à-priorifördelningen $N(0,1)$. Vad är à-posteriorifördelningen för X givet att man observerar $Y = y$?

Lösning: Vi vill, som funktion av x och givet y, bestämma

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)} = C_1(y)f_{Y|X}(y|x)f_X(x) \\ &= C_1(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y-x)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= C_2(y)e^{-(x^2-xy+\frac{1}{2}y^2)} = C_2(y)e^{-\frac{1}{4}y^2}e^{-(x-\frac{1}{2}y)^2} \\ &= C_3(y)e^{-(x-\frac{1}{2}y)^2} \end{aligned}$$

Exponentialfunktionen känner vi igen som den för en normalfördelning med väntevärde 0 och varians 1/2. Eftersom en täthet måste integreras till 1 måste $C_3(y) = 1/\sqrt{\pi}$ och därmed är à-posteriorifördelningen just $N(y/2, 1/2)$.

5. Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1},\ 0 < x < 1$$

för en okänd parameter $\theta > 0$. Antag att $x_1, \dots, x_n$ är mätdata från att stickprov på X.

(a) (2p) Bestäm ML-skattningen $\hat{\theta}$ av θ.

(b) (2p) Beräkna $\mathbb{E}[\ln X]$ som funktion av θ om X är fördelad enligt ovan.

(c) (2p) Är $\hat{\theta}$ väntevärdesriktig (unbiased)?

Lösning: (a) Det gäller att

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{\theta-1}$$

så

$$\ln L = n \ln\theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

Derivera detta och sätt till 0 och få

$$\frac{n}{\hat{\theta}} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

Detta ger

$$\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}.$$

(b)

$$\mathbb{E}[\ln X] = \int_0^1 \theta x^{\theta-1}\ln x\,dx = [x^\theta \ln x]_0^1 - \int_0^1 x^{\theta-1}dx = -\frac{1}{\theta}.$$

(c) Svaret är nej. Antag till exempel att $\theta = 1$ och $n = 1$. Då är $\hat{\theta} = 1/\ln x$, så

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = -\mathbb{E}[\frac{1}{\ln X}] = \infty.$$

6. Man vill undersöka avkastningen av en ny sorts vete, som funktion av bevattingsmängd. Man utför ett försök där man observarar 18 olika par av avkastning och bevattningsmängd. Låt $x_1, \dots, x_n$ vara bevattningsmängderna i liter per kvadratmeter och dag och $y_1, \dots, y_n$ vara motsvarande avkastningar i kg/m^2. De observerade data, som man kan anta är normalfördelade, gav

$$\sum_k x_k = 117.9,\ \sum_k x_k^2 = 845.43,\ \sum_k y_k = 74.8,\ \sum_k y_k^2 = 334.5,\ \sum_k x_k y_k = 530.36.$$

(a) (3p) Skatta regressionslinjen $y = a + bx$ i modellen $Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$.

(b) (3p) Ge ett 95% konfidensintervall för b. Data gav

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_k (y_k - \hat{a} - \hat{b}x_k) = 0.0838.$$

(c) (2p) Ge ett 99% konfidensintervall för den genomsnittliga avkastningen.

Lösning:

(a) ML-skattningarna av a och b ges av

$$\begin{aligned}\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} &= \frac{\sum x_k y_k - \frac{1}{n}\sum x_k \sum y_k}{\sum x_k^2 - \frac{1}{n}(\sum x_k)^2} \\ &= \frac{530.36 - \frac{1}{18}117.9 \cdot 74.8}{845.43 - \frac{1}{18}117.9^2} = 0.5523\end{aligned}$$

och

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{x} = \frac{1}{18}(74.8 - 0.5523 \cdot 117.9) = 0.538.$$

Den skattade regressionslinjen är alltså

$$y = 0.538 + 0.552x.$$

(b) Konfidensintervall för b är

$$\begin{aligned}b = \hat{b} \pm F_{t_{16}}^{-1}(0.975)\frac{s}{\sqrt{S_{xx}}} &= 0.552 \pm 2.12\frac{\sqrt{0.0838}}{\sqrt{73.185}} \\ &\approx 0.552 \pm 0.072.\end{aligned}$$

(c) Detta handlar om ett vanligt konfidensintervall för μ i normalfördelningen

$$\mu = \overline{Y} \pm F_{t_{17}}^{-1}(0.995)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Här är

$$s^2 = \frac{1}{n-1}(\sum y_k^2 - \frac{1}{n}(\sum y_k)^2) = 1.392$$

och $\overline{Y} = 4.16$. så

$$\mu = 4.16 \pm 2.90\frac{\sqrt{1.392}}{\sqrt{18}} = 4.16 \pm 0.81.$$

7. (6p) Visa att Gumbelfördelningen är max-stabil, dvs att om om X och Y är oberoende och Gumbelfördelade med samma skalparameter, så är $\max(X, Y)$ också Gumbelfördelad med samma skalparameter. Kom ihåg att Gumbelfördelningen har fördelningsfunktion

$$F(x) = \exp(-e^{-(x-b)/a}),$$

där a är skalparametern.

Solution: Om X och Y är oberoende och Gumbel med samma skalparameter a and lägesparametrar b_1 respektive b_2 och $Z = \max(X, Y)$, gäller att

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \le x) = \mathbb{P}(X \le x)\mathbb{P}(Y \le x) &= \exp\left(-e^{-(x-b_1)/a} - e^{-(x-b_2)/a}\right) \\ &= \exp\left(-e^{-x/a}(e^{b_1/a} + e^{b_2/a})\right).\end{aligned}$$

Eftersom $e^{b_1/a} + e^{b_2/a}$ är positiv och avbildningen $c \to e^{c/a}$ är kontinuerlig med värdemängd $(0, \infty)$, kan man finna c så att $e^{b_1/a} + e^{b_2/a} = e^{c/a}$. Alltså gäller att

$$\mathbb{P}(Z \le x) = \exp(-e^{-(x-c)/a})$$

För något c, dvs Z är Gumbelfördelad.

8. (6p) Bevisa Schwarz olikhet, dvs att för två stokastiska variabler X och Y gäller att $\mathbb{E}[XY]^2 \le \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]$. Tips: Minimera $\mathbb{E}[(X+tY)^2]$ över t.

Använd sedan detta till att bevisa att för en ickenegativ heltalsvärd stokastisk variabel X gäller att

$$\mathbb{P}(X > 0) \ge \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Lösning: Eftersom $(X + tY)^2 \ge 0$ för alla t gäller att

$$\min_t \mathbb{E}[(X + tY)^2] = 0.$$

Nu är ju $\mathbb{E}[(X+tY)^2] = \mathbb{E}[X^2 + 2tXY + t^2Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2t\mathbb{E}[XY] + t^2\mathbb{E}[Y^2]$. Derivera och sätt till 0 och få

$$E[XY] + t\mathbb{E}[Y^2] = 0$$

som löses av

$$t = t_0 = -\frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

Stoppa nu in t_0 i ekvationen ovan och se att

$$0 \le \mathbb{E}[X^2] - 2\frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]} + \frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]} = \mathbb{E}[X^2] - \frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

En enkel ommöblering ger nu det önskade resultatet.

För att klara den andra delen, observera att $X = XI_{X>0}$, att $I_{X>0}^2 = I_{X>0}$ och att $\mathbb{E}[I_{X>0}] = \mathbb{P}(X > 0)$. Vi får

$$\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[XI_{X>0}]^2 \le \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[I_{X>0}^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{P}(X > 0)$$

Dividera nu bägge sidor av olikheten med $\mathbb{E}[X^2]$ och saken är klar.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101