Tentamen
MVE301 Sannolikhet, statistik och risk

2017-06-01 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Ivar Simonsson, telefon: 031-7725348

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 36 poäng.

---

1. En stokastisk variabel har fördelningsfunktionen

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^4}, \, x \geq 0.$$

(a) (2p) Bestäm täthetsfunktionen för X.

(b) (2p) Beräkna $\mathbb{E}[X]$.

(c) (2p) Beräkna $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$.

Lösning. Tätheten ges av

$$f(x) = F'(x) = \frac{4}{(1+x)^5}, \, x \geq 0.$$

Då fås

$$\mathbb{E}[X+1] = \int_0^\infty \frac{4}{(1+x)^4} dx = \frac{4}{3}$$

och därmed $\mathbb{E}[X] = 1/3$. Det gäller också att

$$\mathbb{E}[(X+1)^2] = \int_0^\infty \frac{4}{(1+x)^3} dx = 2$$

och därmed $\mathbb{E}[X^2] = 2 - 2\mathbb{E}[X] - 1 = 1/3$ och därmed $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 1/3 - (1/3)^2 = 2/9$.

2. (5p) Låt $\mathbf{X}$ och $\mathbf{Y}$ vara två oberoende stickprov på varsin normalfördelning, där de två normalfördelningarna kan antas ha samma varians, men möjligen olika väntevärden μ_1 respektive μ_2. De data som erhållits är

$$\mathbf{X} = (47, 63, 90, 64, 55, 70, 43, 84, 69)$$

$$\mathbf{Y} = (22, 88, 39, 60, 45, 58, 40, 51).$$

Gör ett 99% symmetriskt konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$. Testa också på 1% signifikansnivå om de två väntevärdena är lika mot att de är olika.

Lösning. Konfidensintervallet ges av

$$\mu_1 - \mu_2 = \overline{X} - \overline{Y} \pm z s_P \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}},$$

där $z = F^{-1}_{t_{n+m-2}}(0.995)$ och n och m är antalet mätningar i stickprov $\mathbf{X}$ respektive $\mathbf{Y}$. I detta fall är $n = 9$, $m = 8$, $z = F^{-1}_{t_{15}}(0.995) \approx 2.947$, $s_P^2 = (8s_x^2 + 7s_y^2)/15 = 305.2$, $\overline{X} = 65$ och $\overline{Y} = 50.4$, så konfidensintervallet blir

$$\mu_1 - \mu_2 = 14.6 \pm 25.0.$$

Enligt korrespondensen mellan test och konfidensintervall gäller då att nollhypotesen att $\mu_1 = \mu_2$ inte kan förkastas på 1% signifikansnivå.

3. Vid en väg kommer bilar som en Poissonprocess med intensitet 3 bilar per minut och motorcyklar som en Poissonprocess med intensitet 1 motorcykel per minut (övriga fordon räknar vi inte).

(a) (2p) Vad är sannolikheten att nästa fordon som kommer är en motorcykel?

(b) (2p) Vad är sannolikheten att det kommer precis 5 fordon den nämaste minuten?

(c) (2p) Vad är sannolikheten att det kommer exakt tre bilar före nästa motorcykel?

Lösning. I (a) gäller att beräkna $\mathbb{P}(X > Y)$ där X och Y är exponentialfördelade med parametrar 3 respektive 1. Enligt totala sannolikhetslagen är

$$\mathbb{P}(X > Y) = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) f_Y(x) dx = \int_0^\infty e^{-3x} e^{-x} dx = \frac{1}{4}.$$

Totala antalet fordon som kommer nästa minut är Poissonfördelat(4) eftersom det handlar om antalet impulser i den sammanvägda Poissonprocessen. Den sökta sannolikheten är alltså

$$e^{-4} \frac{4^5}{5!} \approx 0.156.$$

För del (c) använder vi glömskeegenskapen hos exponentialfördelningen. Enligt (a) är sannolikheten att nästa bil kommer före nästa motorcykel 3/4, så den sökta sannolikheten är enligt glömskegenskapen $(3/4)^3(1/4) = 27/256 \approx 0.106$.

4. Låt A, B och C vara tre händelser. Är det generellt sant att

(a) (2p) $\mathbb{P}(A|B) \le \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(B|A) \le \mathbb{P}(B)$?

(b) (2p) $\mathbb{P}(A|B) \le \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B|C) \le \mathbb{P}(B) \Rightarrow \mathbb{P}(A|C) \le \mathbb{P}(A)$?

(c) (2p) $\mathbb{P}(A|B) \le \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A|C) \le \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A|B \cap C) \le \mathbb{P}(A)$?

I samtliga fall krävs ett bevis eller ett motexempel.

Lösning. Del (a) är sann, ty

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \le \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B).$$

Del (b) är falsk. Ett motexempel får man genom att helt enkelt låta $A = C$. Ett specifikt fall; singla en rättvis slant och låt A vara händelsen att man får krona och B att man får klave och $C = A$.

Del (c) är också falsk. Slå två tärningar och låt A vara händelsen att summan blir sju, B vara händelsen att den första tärningen visar en etta C vara händelsen att den andra tärningen visar en sexa.

5. (a) (3p) Betrakta den vanliga linjära regressionsmodellen $Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$, där ϵ_k:na är oberoende och normalfördelade med okänd varians σ^2. Med observationerna (x_k, Y_k), $k = 1, 2, 3$, givna av $(1, -0.18)$, $(3, 1.32)$, $(6, 3.55)$, skatta a och b och gör ett 95% konfidensintervall för b.

(b) (2p) Betrakta också den enklare modellen $Y_k = \mu + \epsilon_k$ (dvs se Y_1, Y_2, Y_3 som ett vanligt stickprov på en $N(\mu, \sigma^2)$-fördelning) och skatta som vanligt μ med medelvärdet av Y:na. Nu gör du de nya observationerna $(2, 1.47)$, $(4, 2.04)$, $(5, 2.93)$. Vilken av de två skattade modellerna ger högst gemensam täthet för det nya observationerna? (Kom ihåg att σ^2 skattas med olika storheter för de två modellerna.)

Lösning. Data ger $S_{xx} = 12.67$, $S_{xy} = 9.45$, $S_{yy} = 7.045$, $s^2 = \hat{\sigma}^2 = (1/(n-2))(S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}) = 0.0000421$. Detta ger

$$\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 0.746,$$

$$\hat{a} = \overline{Y} - \hat{b}\overline{x} = -0.923$$

och 95% konfidensintervall för b som

$$b = \hat{b} \pm F_{t_1}^{-1}(0.975)\sqrt{\frac{s^2}{S_{xx}}} = 0.746 \pm 0.023.$$

Den skattade regressionslinjen är alltså $y = -0.923 + 0.746x$.

För att gå över till (b) så beräknar vi $\hat{\mu} = \overline{Y} = 1.563$ och $s^2 = \hat{\sigma}^2 = 3.523$.

Enligt den skattade linjära regressionsmodellen är de nya Y-observationerna normalfördelade med varians 0.0000421 och med väntevärden 0.569, 2.061 respektive 2.806. De observerade kvadratavvikelserna var 0.8118, 0.00042 och 0.0153, vilka summerar sig till 0.8275 och den gemensamma skattade tätheten för observationerna blev

$$\frac{1}{(2\pi 0.0000421)^{3/2}} e^{-(1/2)0.8275/0.0000421} \approx e^{-9815}.$$

Enligt konstantmodellen är de nya Y-observationerna alla normalfördelade med väntevärde 1.563 och varians 3.523. De observerade kvadratavvikelserna blev 0.0086, 0.2275 och 1.8687 som summerar sig till 2.1048 och den gemensamma skattade tätheten blev

$$\frac{1}{(2\pi * 3.523)^{3/2}} e^{-(1/2)2.1048/3.523} \approx 0.0071.$$

Den linjära modellen beter sig alltså ohyggligt mycket sämre här.

(Faktum är att alla data simulerades utifrån en linjär modell med $a = 0$, $b = 0.5$ och $\sigma = 1$. Det som leder till vårt häpnadsväckande resultat är att de tre datapunkter som modellen anpassades till råkade hamna nästan exakt på en rät linje så att residualerna blev mycket små och variansen underskattades oerhört grovt. Redan att detta skulle ske var mycket osannolikt och med mer data skulle det vara det vara snudd på omöjligt. För att vara specifik; med $n = 3$ och $\sigma = 1$ är $s^2 \sim \chi_1^2$ och sannolikheten att en sådan variabel ska vara så låg som 0.000421 är 0.0052. Om vi hade haft, säg, fem observationer hade vi haft att $3s^2 \sim \chi_3^2$ och sannolikheten att denna skulle vara så låg som $3 * 0.0000421$ är $3.8 \cdot 10^{-7}$.)

6. Låt $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ vara en vektor av två oberoende och standardnormalfördelade stokastiska variabler, låt M vara en 2×2-matris på formen

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Låt $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ ges av $\mathbf{U} = M\mathbf{X}$.

(a) (3p) Visa att U_1 och U_2 är oberoende och standardnormalfördelade.

(b) (2p) Resultatet i (a) går lätt att generalisera till fallet då $\mathbf{X}$ och $\mathbf{U}$ har godtyckligt dimension n och M är en godtyckligt $n \times n$ ortogonalmatris (det behöver du inte göra). Använd detta till att visa att $\overline{X}$ och $(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ är oberoende.

Lösning. Låt D vara ett område i $\mathbb{R}^2$. Då gäller att

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} \in D) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in M^T D) = \iint_{M^T D} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2.$$

Gör nu substitutionen $\mathbf{u} = M\mathbf{x}$. Tack vare att M är ortogonal ger detta att $u_1^2 + u_2^2 = x_1^2 + x_2^2$ och $dx_1 dx_2 = du_1 du_2$ och att högerledet är lika med

$$\iint_D \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2)} du_1 du_2.$$

Eftersom detta är dubbelintegralen över D av den bivariata tätheten för två oberoende standardnormalfördelade stokastiska variabler följer (a).

Låt nu $\mathbf{1}$ stå för kolonnvektorn $(1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Skriv nu $\mathbf{X} = M\mathbf{U}$ för en ortogonalmatris M vars första kolonn är $(1/\sqrt{n})\mathbf{1}$. Skriv också

$$M = [\mathbf{c}_1\, \mathbf{c}_2\, \ldots\, \mathbf{c}_n],$$

där $\mathbf{c}_j$:na är de ortogonala kolonnerna till M. Det betyder att vi kan skriva $\mathbf{X} = \sum_{j=1}^n U_j \mathbf{c}_j$. Vi får

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \mathbf{1}^T \mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} U_1$$

eftersom $\mathbf{c}_j$ är ortogonal mot $\mathbf{1}$ för $j \neq 2$. Dessutom är

$$\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2 = (\mathbf{X} - \overline{X}\mathbf{1})^T (\mathbf{X} - \overline{X}\mathbf{1})$$

och

$$\mathbf{X} - \overline{X}\mathbf{1} = \sum_{j=1}^n U_j \mathbf{c}_j - \frac{1}{\sqrt{n}} U_1 \mathbf{1} = \sum_{j=2}^n U_j \mathbf{c}_j.$$

Detta ger, tack vare ortogonaliteten hos kolonnerna att

$$\sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X})^2 = \sum_{j=2}^n U_j^2.$$

Eftersom $\overline{X}$ är en funktion av U_1 är saken klar. (Dessutom följer det direkt att $(n-1)s^2 \sim \chi^2_{n-1}$.)

7. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en normalfördelning med väntevärde μ och varians σ^2.

(a) (3p) Gör ett 95% uppåt begränsat konfidensintervall för σ^2.

(b) (3p) Antag att du vill göra ett test på 5% signifikansnivå av $H_0 : \sigma^2 = 3$ mot $H_A : \sigma^2 < 3$. Hur stort behöver n vara för att styrkan då $\sigma^2 = 1$ ska vara 95%?

Lösning. Utnyttja att $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$. Detta ger att $\mathbb{P}((n-1)s^2/\sigma^2 \geq z_n) = 0.95$ då $z_n = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.05)$ och det sökta konfidensintervallet ges av

$$\sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{z_n}.$$

För del (b) önskas att $\mathbb{P}_{\sigma^2=1}((n-1)s^2/z_n < 3) \geq 0.95$. Detta är ekvivalent med

$$\mathbb{P}_{\sigma^2=1}((n-1)s^2 < 3z_n) = F_{\chi^2_{n-1}}(3F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.05)) = 0.95.$$

I χ^2-tabellen ser man att detta kräver $n = 20$.

8. (6p) Låt de stokastiska variablerna (Z_1, Z_2, Z_3) väljas oberoende enligt $\mathbb{P}(Z_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z_i = 2) = \theta$. Sedan, givet Z_i:na välj (W_1, W_2, W_3) betingat oberoende med $\mathbb{P}(W_i = 1|Z_i = k) = 1 - \mathbb{P}(W_i = 2|Z_i = k) = \phi_k$.

Antag nu att vi observerat $(W_1, W_2, W_3) = (1, 2, 1)$

(a) Om $\theta = 0.25$, $\phi_1 = 0.7$ och $\phi_2 = 0.6$, beräkna de betingade sannolikheterna att $(Z_1, Z_2, Z_3) = (a_1, a_2, a_3)$, $a_1, a_2, a_3 \in \{1, 2\}$ givet observationen.

(b) Om man istället antar att θ, ϕ_1 och ϕ_2 är oberoende stokastiska variabler som är likformigt fördelade på $[0, 1]$, vad blir då dessa betingade sannolikheter?

Lösning. Skriv $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{W} = (w_1, w_2, w_3)$. Skriv också $\theta(1) = \theta$ och $\theta(2) = 1 - \theta$ och analogt för ϕ_1 och ϕ_2. Då gäller för fixa θ, ϕ_1 och ϕ_2 att

$$f_{\mathbf{X}|\mathbf{W}}(\mathbf{x}|(1,2,1)) \propto f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{W}|\mathbf{X}}((1,2,1)|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{3} \theta(x_i)\phi_{x_i}(w_i).$$

Skriv $v(\mathbf{x})$ för högerledet. För de enskilda $\mathbf{x}$'en blir detta

$$v(1,1,1) = \theta^3 \phi_1^2 (1 - \phi_1)$$

$$v(1,1,2) = \theta^2 (1-\theta)\phi_1(1-\phi_1)\phi_2$$
$$v(1,2,1) = \theta^2 (1-\theta)\phi_1^2(1-\phi^2)$$
$$v(1,2,2) = \theta(1-\theta)^2\phi_1\phi_2(1-\phi_2)$$
$$v(2,1,1) = \theta^2(1-\theta)\phi_1(1-\phi_1)\phi_2$$
$$v(2,1,2) = \theta(1-\theta)^2(1-\phi_1)\phi_2^2$$
$$v(2,2,1) = \theta(1-\theta)^2\phi_1\phi_2(1-\phi_2)$$
$$v(2,2,2) = (1-\theta)^3\phi_2^2(1-\phi_2).$$

Med de $\theta, \phi - 1, \phi_2$ som är givna i (a) blir dessa tal i tur och ordning

$$0.0023,\ 0.0059,\ 0.0092,\ 0.0236,\ 0.0059,\ 0.0152,\ 0.0236,\ 0.0607.$$

De sökta sannolikheterna i (a) ges genom att normalisera dessa (dvs dividera med summan av dem) och blir i tur och ordning

$$0.0157,\ 0.0403,\ 0.0628,\ 0.1612,\ 0.0403,\ 0.1038,\ 0.1612,\ 0.4146.$$

För att besvara (b) observerar vi att de sökta sannolikheterna är proportionella mot $\mathbb{E}[v(\mathbf{x})|\theta, \phi_1, \phi_2]$. Det gäller att $\mathbb{E}[v(1,1,1)] = \mathbb{E}[\theta^3\phi_1^2(1-\phi_1)] = (1/4)(1/12) = 1/48$ tack vare oberoendet mellan θ och ϕ_1. På samma sätt blir de övriga väntevärdena i tur och ordning (samma ordning som ovan)

$$1/144,\ 1/72,\ 1/144,\ 1/144,\ 1/72,\ 1/144,\ 1/48.$$

Efter normalisering ser vi att de sökta sannolikheterna är (observera alla uppenbara symmetrier)

$$3/14,\ 1/14,\ 1/7,\ 1/14,\ 1/14,\ 1/7,\ 1/14,\ 3/14.$$

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101