Tentamen
MVE301 Sannolikhet, statistik och risk

2017-08-15 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Olof Elias, telefon: 031-7725325

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 36 poäng.

---

1. Slå två tärningar och låt X och Y vara de respektive poängen. Låt $Z = (X-3)^2 + Y$. Beräkna

(a) (2p) $\mathbb{P}(Z = 7)$,

(b) (2p) $\mathbb{E}[Z]$,

(c) (2p) $\mathbb{V}\text{ar}[Z]$.

Lösning. Det gäller att $Z = 7$ för precis följande värden på (X, Y): $(1, 3)$, $(2, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 3)$. Alltså är svaret i (a) $4/36$, dvs $1/9$.

Det gäller att $(X-3)^2$ antar värdena 0 eller 9, vardera med sannolikhet $1/6$ eller värdena 1 och 4, vardera med sannolikhet $1/3$. Därför gäller

$$\mathbb{E}[(X-3)^2] = \frac{1}{6}(0+9) + \frac{1}{3}(1+4) = \frac{19}{6}$$

och

$$\mathbb{E}[(X-1)^4] = \frac{1}{6}(0+81) + \frac{1}{3}(1+16) = \frac{115}{6}.$$

och därmed $\mathbb{V}\text{ar}[(X-3)^2] = 115/6 - (19/6)^2 = 329/36$. Eftersom $\mathbb{E}[Y] = 7/2$ och $\mathbb{V}\text{ar}[Y] = 35/12$ gäller

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{19}{6} + \frac{7}{2} = \frac{20}{3}$$

och, eftersom X och Y är oberoende,

$$\mathbb{V}\text{ar}[Z] = \frac{329}{36} + \frac{35}{12} = \frac{217}{18}.$$

2. (5p) Betrakta den vanliga linjära regressionsmodellen, dvs $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ är sådana att

$$Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$$

där ϵ_k:na är oberoende och normalfördelade med väntevärde 0 och varians σ^2 och a, b och σ^2 är okända parametrar. Antag nu att man observerat data $(0, 1)$, $(2, 4)$ och $(5, 12)$. Skatta a och b och ge ett 95% konfidensintervall för b. Ge också ett 90% prediktionsintervall för Y, där (x, Y) är en ny observation med $x = 3$.

Lösning. Det gäller att $\hat{b} = S_{xy}/S_{xx} = 85/38 \approx 2.24$ och $\hat{a} = \overline{y} - \hat{b}\overline{x} = 17/38 \approx 0.45$. Vidare är

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right) = \frac{49}{38}.$$

Därmed

$$b = \hat{b} \pm F_{t_1}^{-1}(0.975)\frac{s}{S_{xx}} = \frac{85}{38}\sqrt{\frac{49/38}{38/3}} \approx 2.24 \pm 4.06 \ (95\%).$$

Prediktionsintervallet är

$$Y = \hat{a} + \hat{b}x \pm F_{t_1}^{-1}(0.95)s\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{(x-\overline{x})^2}{S_{xx}}} \approx 7.13 \pm 8.38 \ (90\%).$$

3. Vid en väg kommer bilar som en Poissonprocess med intensitet 7 bilar per minut och motorcyklar som en Poissonprocess med intensitet 2 motorcyklar per minut (övriga fordon räknar vi inte).

(a) (2p) Vad är sannolikheten att nästa fordon som kommer är en motorcykel?

(b) (2p) Vad är sannolikheten att det kommer precis 10 fordon den nämaste minuten?

(c) (2p) Vad är sannolikheten att det kommer exakt tre bilar före nästa motorcykel?

Lösning. I (a) gäller att beräkna $\mathbb{P}(X > Y)$ där X och Y är exponentialfördelade med parametrar 7 respektive 2. Enligt totala sannolikhetslagen är

$$\mathbb{P}(X > Y) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))f_Y(x)dx = \int_0^\infty e^{-7x}2e^{-2x}dx = \frac{2}{9}.$$

Totala antalet fordon som kommer nästa minut är Poissonfördelat(9) eftersom det handlar om antalet impulser i den sammanvägda Poissonprocessen. Den sökta sannolikheten är alltså

$$e^{-9}\frac{9^{10}}{10!} \approx 0.119.$$

För del (c) använder vi glömskeegenskapen hos exponentialfördelningen. Enligt (a) är sannolikheten att nästa bil kommer före nästa motorcykel 7/9, så den sökta sannolikheten är enligt glömskegenskapen $(7/9)^3(2/9) = 686/6561 \approx 0.105$.

4. En klass med 13 flickor och 8 pojkar delas på måfå in i sju grupper, grupp $1, 2, \ldots, 7$, om tre elever i varje grupp.

(a) (2p) Vad är sannolikheten att grupp 1 kommer att innehålla bara pojkar?

(b) (2p) Vad är sannolikheten att både grupp 1 och 2 kommer att innehålla bara pojkar?

(c) (2p) Vad är sannolikheten att minst en grupp kommer att innehålla bara pojkar?

Lösning. Skriv A_i för händelsen att det blir tre pojkar i grupp i. Antal sätt att fördela eleverna i sju grupper om tre är $\binom{21}{3}\binom{18}{3}\ldots\binom{3}{3} = 21!/(3!)^7$. Antalet sätt att fördela så att det blir tre pojkar i grupp 1 är $\binom{8}{3}18!/(3!)^6$. Svaret i (a) är alltså

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{18! \cdot 3! \cdot \binom{8}{3}}{21!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{21 \cdot 20 \cdot 19} = \frac{4}{95}.$$

Antal sätt att fördela så att det blir tre pojkar i både grupp 1 och 2 är $\binom{8}{6}15!/(3!)^5$ så svaret i (b) är

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{8}{6}\binom{6}{3}15!(3!)^2}{21!} = \frac{1}{19 \cdot 17 \cdot 6} = \frac{1}{1938}.$$

För att svara på (c) använder vi inklusion-exklusionsformeln. Eftersom $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$ for distinkta i, j, k gäller

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^7 A_i\right) = \sum_{i=1}^7 \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i=1}^7 \sum_{j=i+1}^7 \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 7 \cdot \frac{4}{95} - 21 \cdot \frac{1}{1938} = \frac{987}{3230} \approx 0.306.$$

5. (5p) En stokastisk variabel X har täthetsfunktionen $C(\theta)x^{-\theta}$, $x \geq 1$, för en parameter $\theta > 1$. Bestäm $C(\theta)$.

Låt sedan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara ett stickprov där X_k:na har samma fördelning som X och ge en ML-skattning av θ.

Lösning. Eftersom $\int_1^\infty f(x)dx = 1$ och $\int_1^\infty x^{-\theta} = \frac{1}{\theta-1}$, erhålls

$$C(\theta) = \theta - 1$$

och därmed också $f(x) = (\theta-1)x^{-\theta}$, $x \geq 1$. Således blir stickprovets likelihood

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = (\theta-1)^n \prod_{i=1}^n x_i^{-\theta}$$

vars logaritm är

$$l(\theta; x_1, \ldots, x_n) = n\ln(\theta-1) - \theta\sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

Derivera m.a.p. θ och sätt till 0 och få

$$\frac{n}{\theta-1} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

och ML-skattningen $\hat{\theta}$ är lösningen till detta, dvs

$$\hat{\theta} = 1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}.$$

6. Minns att för en mängd data $x_1, \ldots, x_m$, skriver vi $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(m)}$ för den storleksordnade datamängden (dvs $x_{(i)}$ är det i:te minsta av x_k:na). Låt $n \geq 2$ och $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ vara oberoende och likformigt fördelade på $[0,1]$ och låt

$$L_n = \max\{X_{(1)}, X_{(2)} - X_{(1)}, X_{(3)} - X_{(2)}, \ldots, 1 - X_{(n-1)}\}.$$

(För intuitionen, tänk gärna på detta som att på måfå bryta en sticka av längd 1 i n delar och låta L_n vara den längsta delen.)

(a) (2p) Låt X vara en ickenegativ stokastisk variabel. Visa att

$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Tips: Kom ihåg Schwarz olikhet, som säger att om Y och Z är två ickenegativa stokastiska variabler så gäller att $\mathbb{E}[YZ]^2 \leq \mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[Z^2]$.

(b) (2p) Visa att för alla $c > 2$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(L_n \geq \frac{c\ln n}{n}\right) = 0.$$

(c) (2p) Visa att för alla $c < 1$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(L_n \leq \frac{c\ln n}{n}\right) = 0.$$

Tips: I (b) och (c) kan man dela in intervallet $[0, 1]$ i lika och lagom stora bitar och betrakta sannolikheten att någon av dem inte innehåller något X_i. I (c) är det lämpligt att använda resultatet i (a).

Lösning. För (a),

$$\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[XI_{X>0}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[I_{X>0}^2] = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{P}(X > 0).$$

För (b), dela in intervallet i $K := 2n/(c \ln n)$ delintervall om längd $c \ln n/(2n)$. Låt N vara antalet delintervall som inte innehåller något X_i. Sannolikheten att ett delintervall inte innehåller något X_i är $(1 - c \ln n/(2n))^n) \leq 2/n^{c/2}$. Därmed är $\mathbb{E}[N] \leq 2K/n^{c/2} < n^{1-c/2} \to 0$ eftersom $c > 2$. Nu följer (b) av Markovs olikhet och det faktum att om inget av dessa delintervall är tomt måste L_n vara mindre än dubbla längden av ett delintervall.

För (c) delar vi in i $K := n/(c \ln n)$ delintervall av längd $c \ln n/n$. Sannolikheten att ett sådant delintervall inte innehåller något X_i är $(1 - c \ln n/n)^n =: p$. Därmed är $\mathbb{E}[N] = Kp$. Sannolikheten att två distinkta delintervall är tomma är på samma sätt p^2. Därför är $\mathbb{E}[N^2] \leq K(K-1)p^2 + Kp < K^2p^2 + Kp$. Enligt (a) gäller då att det finns ett tomt delintervall med sannolikhet minst

$$\frac{K^2p^2}{K^2p^2 + Kp} \to 1$$

eftersom $Kp \to \infty$.

7. Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en $N(\mu, \sigma^2)$-fördelning med μ och σ^2 okända för oss. Skatta som vanligt variansen σ^2 med s^2. Antag nu att de sanna värdena på μ och σ är 0 respektive 1.

(a) (3p) Uppgiften här att illustrera att med få datapunkter finns en påtaglig risk att σ^2 kommer att gravt underskattas: Bestäm a så att $\mathbb{P}(s^2 \leq a) = 0.025$. Gör detta för $n = 2$ och $n = 3$.

(b) (2p) Bestäm styrkan för test av $H_0 : \mu = 1$ mot $H_A : \mu < 1$ på signifikansnivå 0.05 om vi vet att $\sigma^2 = 1$. Gör även detta för $n = 2$ och $n = 3$.

Lösning. Det gäller att $(n-1)s^2/\sigma^2$ är χ^2_{n-1}-fördelad. Eftersom $\sigma^2 = 1$ gäller i vårt fall helt enkelt att $(n-1)s^2 \sim \chi^2_{n-1}$ och därmed att $\mathbb{P}(s^2 \leq F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.025)/(n-1))$. Enligt tabell ser vi att detta betyder för $n = 2$ att $\mathbb{P}(s^2 \leq 0.001) \approx 0.025$ och för $n = 3$ att $\mathbb{P}(s^2 \leq 0.025) \approx 0.025$. M.a.o. de sökta svaren är $a = 0.001$ för $n = 2$ och $a = 0.025$ för $n = 3$. (Detta betyder att det är 2.5% risk att skatta variansen till 1/1000 av dess rätta värde då $n = 2$ och till 1/40 av det rätta värdet då $n = 3$. Det är alltså ganska stor risk att variansen blir gravt underskattad, men situationen blir snabbt mycket bättre med mer data.)

För del (b) gäller att testet förkastar H_0 om $\sqrt{n}(\overline{X} - 1) \leq -1.64$, dvs om $\sqrt{n}\overline{X} \leq \sqrt{n} - 1.96$. Eftersom $\mu = 0$ är vänstersidan standardnormal, så svaret för $n = 2$ är $\Phi(\sqrt{2} - 1.64) = 0.411$ och för $n = 3$ får vi styrkan $\Phi(\sqrt{3} - 1.64) = 0.537$.

8. (5p) Betrakta följande slumpförsök. Man har två mynt, A och B, som är sådana att ett kast med mynt A ger klave med sannolikhet $\theta_A = 0.8$ och ett kast med mynt B ger klave med sannolikhet $\theta_B = 0.4$. Man väljer ett av mynten på måfå och kastar det.

(a) (2p) Vad är den betingade sannolikheten att man valde mynt A givet att kastet resulterade i en klave?

(b) (3p) Antag nu att θ_A och θ_B istället var två oberoende stokastiska variabler som var likformigt fördelade på $[0, 1]$ och att försöket upprepas n ggr. Vad är den betingade sannolikheten att mynt A valdes varje gång givet att varje kast resulterade i klave?

Lösning. (a). Låt A vara händelsen att mynt A väljs och definiera B analogt. Låt K vara händelsen att kastet resulterar i klave. Enligt Bayes formel är

$$\mathbb{P}(A|K) = \frac{\mathbb{P}(K|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(K|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(K|B)\mathbb{P}(B)} = \frac{2}{3}.$$

(b). Skriv A_i för händelsen att mynt A valdes vid kast nr i och motsvarande för B_i och K_i. Enligt Bayes formel gäller för varje $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ att

$$\mathbb{P}(\cap_{i\in I}A_i \cap \cap_{i\notin I}B_i | \cap_{i=1}^n K_i) \propto \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n K_i | \cap_{i\in I} A_i \cap \cap_{i\notin I}B_i)\mathbb{P}(\cap_{i\in I}A_i \cap \cap_{i\notin I}B_i)$$

$$\propto \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n K_i | \cap_{i\in I} A_i \cap \cap_{i\notin I}B_i) = \mathbb{P}(\cap_{i\in I}K_i | \cap_{i\in I} A_i)\mathbb{P}(\cap_{i\notin I}K_i | \cap_{i\notin I} B_i)$$

där den andra proportionaliteten förljer av den högra faktorn i led 2 är densamma för alla I och den sista likheten av oberoendeantagandena. Nu gäller att

$$\mathbb{P}(\cap_{i\in I}K_i | \cap_{i\in I} A_i) = \int_0^1 \mathbb{P}(\cap_{i\in I}K_i | \cap_{i\in I} A_i, \theta_A = x)dx = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

där k är antal element i I. Högerledet ovan är alltså $1/((k+1)(n-k+1))$ och efter normalisering får vi att den sökta betingade sannolikheten är

$$\frac{1}{(n+1)\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(n-k+1)}}$$

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101