Tentamen
MVE301 Sannolikhet, statistik och risk

2017-10-06 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Fanny Berglund, telefon: 031-7725325

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 36 poäng.

---

1. Slå två tärningar och låt X och Y vara de respektive poängen. Låt $Z = 2^{X-1} + Y$. Beräkna

(a) (2p) $\mathbb{P}(Z = 7)$,

(b) (2p) $\mathbb{E}[Z]$,

(c) (2p) $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z]$.

Lösning. Summan blir 7 precis för de tre utfallen $(1, 6)$, $(2, 5)$ och $(3, 3)$, så $\mathbb{P}(Z = 7) = 3/36 = 1/12$. Vi har $\mathbb{E}[2^{X-1}] = (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32)/6 = 21/2$ och $\mathbb{E}[Y] = 7/2$, så $\mathbb{E}[Z] = 21/2 + 7/2 = 14$. Vidare är $\mathbb{E}[Y^2] = (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36)/6 = 91/6$, så $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] = 91/6 - (7/2)^2 = 35/12$ och $\mathbb{E}[(2^{X-1})^2] = (1+4+16+64+256+1024)/6 = 1375/6$, så $\mathbb{V}\mathrm{ar}[2^{X-1}] = 1375/6 - (21/2)^2 = 1427/12$. Eftersom X och Y är oberoende får vi $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[2^{X-1}] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] = 731/6$.

2. (6p) Betrakta den vanliga linjära regressionsmodellen, dvs $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ är sådana att

$$Y_k = a + bx_k + \epsilon_k$$

där ϵ_k:na är oberoende och normalfördelade med väntevärde 0 och varians σ^2 och a, b och σ^2 är okända parametrar. Antag nu att man observerat data $(0, 1)$, $(2, 4)$ och $(3, 5)$ och $(5, y)$. Skattningen av b blev $\hat{b} = 2$. Ange värdet på y. Skatta också a och ge ett 95% konfidensintervall för b.

Lösning. Vi har $\sum x_k = 10$ och $\sum x_k^2 = 38$, så $S_{xx} = 38 - (1/4)10^2 = 13$. Vidare har vi $\sum y_k = 10 + y$ och $\sum x_k y_k = 23 + 5y$ och därmed $S_{xy} = 23 + 5y - (1/4) \cdot 10(10 + y) = -2 + 5y/2$. Således är $\hat{b} = S_{xy}/S_{xx} = (-2 + 5y/2)/13 = 2$ vilket ger $y = 56/5$ (och, förstås, $S_{xy} = 26$).

Nu får vi också att $\sum y_k = 21.2$, $\sum y_k^2 = 167.44$ och därmed $S_{yy} = 167.44 - 0.25 \cdot 21.2^2 = 55.08$ och $s^2 = (1/2)(S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}) = 1.54$ och konfidensintervallet på 95% för b blir

$$b = \hat{b} \pm F_{t_2}^{-1}(0.975) \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}} = 2 \pm 4.3\sqrt{\frac{1.54}{13}} = 2 \pm 1.48.$$

3. (6p) En stokastisk variabel X har täthetsfunktionen

$$f_\theta(x) = \frac{C(\theta)}{1 + x}, \; 0 < x < \theta$$

för en parameter $\theta > 0$. Bestäm $C(\theta)$ och bestäm fördelningsfunktionen för X.

Låt sedan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara ett stickprov där X_k:na har samma fördelning som X och ge en ML-skattning av θ.

Lösning. Eftersom $\int_0^\theta f_\theta(x)dx = 1$ och $\int_0^\theta 1/(1+x)\,dx = \ln(1+\theta)$ gäller att

$$C(\theta) = \frac{1}{\ln(1+\theta)}.$$

Fördelningsfunktionen ges av

$$F_\theta(x) = \int_0^x f_\theta(t)dt = \frac{1}{\ln(1+\theta)} \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+\theta)}.$$

För stickprovet gäller

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\ln(1+\theta)^n} \prod_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i}.$$

Som funktion av θ är detta en avtagande funktion, så för att maximera skall θ väljas så liten som möjligt. Det minsta möjliga värdet som kan väljas är $\max_i x_i$. Svaret är alltså att

$$\hat{\theta} = \max(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

4. Betrakta ett mynt som vid slantsingling ger klave med den okända sannolikheten p. För att testa nollhypotesen att $p = 1/2$ mot alternativhypotesen att $p > 1/2$ singlas myntet 12 gånger.

(a) (2p) Hur många klave behöver man få för att förkasta nollhypotesen på 5% signifikansnivå?

(b) (2p) Om det korrekta värdet på p är $3/4$, vad är sannolikheten att nollhypotesen kommer att förkastas på 5% signifikansnivå?

(c) (2p) En Bayesiansk modell: om två mynt är sådana att mynt 1 ger klave med sannolikhet $1/2$ och mynt 2 ger klave med sannolikhet $3/4$, man väljer slumpmässigt ett av mynten på så sätt att mynt 1 väljs med sannolikhet 0.95 och sedan singlar det valda myntet 12 gånger, hur många klave behöver man då få för att den betingade sannolikheten att mynt 2 valdes ska överstiga $1/2$?

Lösning. Låt X vara antalet klave. Det gäller att $\mathbb{P}_{1/2}(X = k) = \binom{12}{k}(1/2)^{12} = \binom{12}{k}/4096$. Det följer att $\mathbb{P}_{1/2}(X \geq 10) = (66 + 12 + 1)/4096 < 0.05$ medan $\mathbb{P}_{1/2}(X \geq 9) = (220 + 66 + 12 + 1)/1024 > 0.05$, så det behövs minst 10 klave för att förkasta $H_0 : p = 1/2$.

Vidare gäller att $\mathbb{P}_{3/4}(X \geq 10) = 66(3/4)^{10}(1/4)^2 + 12(3/4)^{11}(1/4) + (3/4)^{12} = 0.1478 \approx 0.39$.

I den Bayesianska modellen gäller $\mathbb{P}(p = 3/4|X = k) \propto \mathbb{P}(X = k|p = 3/4)\mathbb{P}(p = 3/4) = \binom{12}{k}(3/4)^k(1/4)^{12-k} \cdot 0.05$ och $\mathbb{P}(p = 1/2|X = k) \propto \mathbb{P}(X = k|p = 1/2)\mathbb{P}(p = 1/2) = \binom{12}{k} \cdot (1/4096) \cdot 0.95$. Därmed är

$$\frac{\mathbb{P}\left(p = \frac{3}{4}|X = k\right)}{\mathbb{P}\left(p = \frac{1}{2}|X = k\right)} = \frac{4096 \cdot 0.75^k 0.25^{12-k} 0.05}{0.95}.$$

Det krävs $k \geq 11$ för att denna kvot ska överstiga 1, så svaret att man behöver få 11 klave.

5. (5p) Låt X_1 och X_2 vara två oberoende normalfördelade stokastiska variabler, båda med väntevärde 0 och varians σ^2. Det gäller att $\mathbb{P}(X_1 > 1) = 0.1$. Vad är σ^2?

Om det vidare gäller att korrelationskoefficienten $\rho(X_1, X_2) = 1/4$, vad är variansen av medelvärdet $\overline{X} = (X_1 + X_2)/2$ och vad är $\mathbb{P}(\overline{X} > 1)$?

Lösning. Eftersom $X_1 \sim N(0, \sigma^2)$ gäller att $X_1/\sigma \sim N(0,1)$, så

$$\mathbb{P}(X_1 > 1) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1}{\sigma} > \frac{1}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.1$$

dvs $\Phi(1/\sigma) = 0.9$, vilket via normalfördelningstabell ger $1/\sigma \approx 1.28$, dvs $\sigma^2 \approx 1/1.28^2 = 0.61$.

Eftersom det per definition gäller att $\rho(X_1, X_2) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2)/\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_2)} = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2)/\sigma^2$ får vi att $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = \rho(X_1, X_2)\sigma^2 \approx 0.61/4$. Därför är

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_2) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) \approx 2\sigma^2 + \frac{0.61}{2} = \frac{5}{2} \cdot 0.61$$

och därmed

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\overline{X}) = \frac{1}{4}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1 + X_2) \approx \frac{5}{8} \cdot 0.61 \approx 0.38$$

varför $\overline{X} \sim N(0, 0.38)$. Slutligen får vi att

$$\mathbb{P}(\overline{X} > 1) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}}{\sqrt{0.38}} > \frac{1}{\sqrt{0.38}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{0.38}}\right) \approx 0.502.$$

6. (5p) Låt $X_1, X_2, \ldots$ vara oberoende och exponentialfördelade stokastiska variabler med parameter λ. Låt $Y_1, Y_2, \ldots$ ges av att $Y_n = I_{\{X_n > \ln n\}}$ och låt $Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$. Visa att $\mathbb{E}[Y] = \infty$ om och endast om $\lambda \leq 1$.

Lösning. Det gäller att $\mathbb{E}[I_{\{X_n > \ln n\}}] = \mathbb{P}(X_n > \ln n) = e^{-\lambda \ln n} = n^{-\lambda}$. Alltså är

$$\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} Y_n] = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\lambda}$$

vilket är ändligt om $\lambda > 1$ och oändligt om $\lambda \leq 1$.

7. (a) (2p) Låt först den stokastiska variabeln Θ vara $\beta(1,3)$-fördelad och singla sedan slant tio gånger med ett mynt som ger klave med sannolikhet Θ. Vad är àposteriorifördelningen för Θ givet att det blev klave tre gånger?

(b) (4p) Skapa två mynt, mynt 1 och 2, genom att låta sannolikheterna för klave för de båda mynten, Θ_1 och Θ_2, ha apriorifördelningarna $\beta(1,3)$ respektive $\beta(4,1)$. Välj sedan ett av mynten på måfå och kasta det valda myntet två gånger. Vad är sannolikheten att mynt 1 valdes givet att båda kasten resulterade i klave? Vad är det betingade väntevärdet av Θ_1 givet att båda kasten resulterade i klave?

Lösning. Låt X vara antalet klave. Givet $\Theta = \theta$ gäller då att $X \sim Bin(10, \theta)$. För (a) gäller därför att

$$f_{\Theta|X}(\theta|3) \propto f_{X|\Theta}(3|\theta) f_\Theta(\theta) \propto \theta^3(1-\theta)^7(1-\theta)^2 = \theta^3(1-\theta)^9.$$

Detta känner vi igen som en konstant gånger tätheten för $\beta(4, 10)$ vilket alltså är àposteriorifördelningen för Θ givet $X = 3$.

För del (b) noterar vi att i tätheten för $\beta(a,b)$-fördelningen, $f(x) = (1/C)x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, $0 < x < 1$, är konstanten $C = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$. Nu gäller det allmänt för heltal m och n att

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n = \frac{1}{(m+n+1)\binom{m+n}{n}}$$

vilket ses genom upprepad partiell integration. Därmed gäller för $Y \sim \beta(a,b)$ att

$$\mathbb{E}[Y] = (a+b-1)\binom{a+b-2}{b-1}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx = \frac{(a+b-1)\binom{a+b-2}{b-1}}{(a+b)\binom{a+b-1}{b-1}} = \frac{a}{a+b}$$

och på samma sätt

$$\mathbb{E}[Y^2] = (a+b-1)\binom{a+b-2}{b-1} = \frac{(a+b-1)\binom{a+b-2}{b-1}}{(a+b+1)\binom{a+b}{b-1}} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}.$$

Låt nu återigen X vara antalet klave på de två kasten och låt A vara händelsen att mynt 1 valdes. Då gäller att (eftersom $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^c) = 1/2$)

$$\mathbb{P}(A|X=2) \propto \mathbb{P}(X=2|A) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(X=2|A,\Theta_1)] = \mathbb{E}[\Theta_1^2] = \frac{1\cdot 2}{4\cdot 5} = \frac{1}{10}$$

medan, på samma sätt,

$$\mathbb{P}(A^c|X=2) \propto \mathbb{E}[\Theta_2^2] = \frac{4\cdot 5}{5\cdot 6} = \frac{2}{3}.$$

Detta ger att

$$\mathbb{P}(A|X=2) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{2}{3}} = \frac{3}{23}.$$

Slutligen gäller att

$$\mathbb{E}[\Theta_1|X=2] = \mathbb{E}[\Theta_1|X=2,A]\mathbb{P}(A|X=2)+\mathbb{E}[\Theta_1|X=2,A^c]\mathbb{P}(A^c|X=2) = \frac{1}{2}\frac{3}{23}+\frac{1}{4}\frac{20}{23} = \frac{13}{46}.$$

Här kommer faktorn 1/2 i den första termen från att àposteriorifördelningen för Θ_1 givet $X = 2$ är $\beta(3,3)$ när vi vet att mynt 1 användes och faktorn 1/4 i den andra termen kommer från att när vi vet att mynt 2 valdes så uppdaterades vår kunskap om mynt 1 inte alls och i det läget har alltså Θ_1 fortfarande $\beta(1,3)$-fördelning.

8. (5p) Antag att X har den momentgenererande funktionen

$$M(t) = \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}.$$

Vad är sannolikhetsfördelningen för X?

Lösning. Det gäller att om X är den urartade stokastiska variabel som alltid är lika med konstanten c, så gäller att

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] = e^{ct}.$$

Vidare gäller att om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är stokastiska variabler och Z är den stokastiska variabel som är lika med X_i med sannolikhet p_i så är

$$M_Z(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i M_{X_i}(t).$$

Genom att kombinera dessa fakta följer att den givna momentgenererande funktionen $M(t)$ är mgf för en stokastisk variabel som antar värdena 2, 1, -1 och -2, vardera med sannolikhet 1/6, 1/3, 1/4 respektive 1/4. Eftersom mgf är entydig gäller att X har just denna fördelning.

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101