Tentamen
MVE301 Sannolikhet, statistik och risk

2018-05-31 kl. 8:30 - 13:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Ivar Simonsson, telefon: 031-7725325

Hjälpmedel: Valfri miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstesen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 36 poäng.

---

1. (6p) Från två normalfördelningar med väntevärde och varians μ_1 och σ_1^2 respektive μ_2 och σ_2^2 har det dragits två stickprov:

$$\mathbf{X} = (83.4, 93.3, 91.3, 89.4, 109.4, 92.6)$$

$$\mathbf{Y} = (120.2, 105.1, 87.2, 111.6, 139.5).$$

(a) Gör ett 95 % konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ under antagandet att $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Verkar antagandet rimligt?

(b) Gör nu ett 95 % konfidensintervall för $\mu_1 - \mu_2$ utan detta antagande, men istället under antagandet att de två varianserna är kända: $\sigma_1^2 = 10^2$ och $\sigma_2^2 = 15^2$.

Lösning. I uppgiften specificeras inte vilken typ av konfidensintervall som ska göras. Vi väljer här att göra ett symmetrisk konfidensintervall. Det ges av

$$\mu_1 - \mu_2 = \overline{X} - \overline{Y} \pm z \cdot s_P \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

där $z = F^{-1}_{t_{n+m-2}}(0.975)$, $s_P^2 = ((n-1)s_x^2 + (m-1)s_y^2)/(n+m-2)$. Här är n och m storleken på de två stickproven, i vårt fall $n = 6$, $m = 5$, och s_x^2 och s_y^2 de två stickprovsvarianserna. Med de givna data blir detta

$$\mu_1 - \mu_2 = -19.5 \pm 2.26\sqrt{206.7\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)} = -19.5 \pm 19.7.$$

Dock var de två stickprovsvarianserna 75.4 respektive 370.9, dvs rejält olika. Nu är visserligen stickproven små, men det verkar ändå inte helt rimligt att anta att de två underliggande varianserna är lika.

Låt oss nu gå över till (b). Här har vi att $\overline{X}$ och $\overline{Y}$ är oberoende och normalfördelade med väntevärde och varians μ_1 och $100/6$ respektive μ_2 och $225/5$, vilket ger att

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{100}{6} + \frac{225}{5}}} \sim N(0, 1)$$

vilket i sin tur ger det symmetriska konfidensintervallet

$$\mu_1 - \mu_2 = -19.5 \pm 1.96\sqrt{\frac{100}{6} + \frac{225}{5}} = -19.5 \pm 15.4.$$

2. (6p) Låt vektorn (X, Y) av stokastiska variabler vara likformigt fördelad på det triangulära området $0 < x < 1$, $0 < y < 2 - 2x$.

(a) Bestäm de två marginaltätheterna f_X och f_Y.

(b) Beräkna väntevärdena och varianserna av X och Y, samt $\mathbb{C}\text{ov}(X, Y)$.

Lösning. Den bivariata tätheten ges av 1 delat med arean av området, vilken i det här fallet är 1, så

$$f(x, y) = 1,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 - 2x.$$

Därmed är

$$f_X(x) = \int_0^{2-2x} dy = 2 - 2x,\ 0 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y/2} dx = 1 - \frac{1}{2}y,\ 0 < y < 2.$$

Vidare är

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x f_X(x) dx = 2\int_0^1 x(1-x)dx = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^2 y\left(1 - \frac{1}{2}y\right) dy = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6},$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^2 y^2\left(1 - \frac{1}{2}y\right) dy = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1 \int_0^{2-2x} xy\, dy\, dx = 2\int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{6},$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18},$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{8}.$$

Som bonus (trots att det inte ingick i uppgiften) kan vi beräkna

$$\rho_{X,Y} = -\frac{1/18}{\sqrt{(1/18)(2/9)}} = -\frac{1}{2}.$$

3. (5p) Anja, Bengt och Carola spelar ett spel. Vad spelet går ut på och hur det fungerar behöver vi inte bry oss om. Vi behöver bara veta att högst poäng vinner, att Anjas poäng är en Poissonfördelad stokastisk variabel med parameter 2, att Bengts poäng är Poissonfördelad med parameter 3, att Carolas poäng är Poissonfördelad med paramater 4 och att spelarnas poäng är oberoende av varandra.

Poängen blev 1, 2 och 3, men vi vet inte vem som fick vad. Vad är den betingade sannolikheten givet denna information att det var Carola som vann?

Lösning. Låt $A_i, = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ vara händelsen att Anja får i poäng, B_i sannolikheten att Bengt får i poäng och C_i sannolikheten att Carola får i poäng. Vi söker

$$\mathbb{P}\left((A_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (A_2 \cap B_1 \cap C_3) \middle| \bigcup_{i,j,k \in \{1,2,3\}: i \neq j \neq k \neq i} (A_i \cap B_j \cap C_k)\right)$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left((A_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (A_2 \cap B_1 \cap C_3)\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i,j,k \in \{1,2,3\}: i \neq j \neq k \neq i} (A_i \cap B_j \cap C_k)\right)}$$

Det gäller att

$$\mathbb{P}(A_i \cap B_j \cap C_k) = e^{-6} \frac{2^i 3^j 4^k}{2!3!}.$$

Många faktorer kan förkortas bort i den önskade kvoten och vi får att det sökta svaret är

$$\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 + 2^2 \cdot 3 \cdot 4^3}{2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 + 2^2 \cdot 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 3^3 \cdot 4^2 + 2^3 \cdot 3 \cdot 4^2 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4 + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 4} = \frac{40}{81}.$$

4. Låt A, B och C vara tre händelser. Är det generellt sant att

(a) (2p) $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(B|A) \leq \mathbb{P}(B)$?

(b) (2p) $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B|C) \leq \mathbb{P}(B) \Rightarrow \mathbb{P}(A|C) \leq \mathbb{P}(A)$?

(c) (2p) $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A|C) \leq \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A|B \cap C) \leq \mathbb{P}(A)$?

I samtliga fall krävs ett bevis eller ett motexempel.

Lösning. Del (a) är sann, ty

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \leq \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B).$$

Del (b) är falsk. Ett motexempel får man genom att helt enkelt låta $A = C$. Ett specifikt fall; singla en rättvis slant och låt A vara händelsen att man får krona och B att man får klave och $C = A$.

Del (c) är också falsk. Slå två tärningar och låt A vara händelsen att summan blir sju, B vara händelsen att den första tärningen visar en etta C vara händelsen att den andra tärningen visar en sexa.

5. Låt $X_1, X_2, \ldots, X_n$ vara ett stickprov på en Cauchyfördelning, dvs en fördelning som har täthetsunktion,

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\pi\theta\left(1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right)},\ x \in \mathbb{R}.$$

(a) (1p) Visa att $\mathbb{E}[X]$ inte existerar.

(b) (4p) Visa att ML-skattningen av θ ges av lösningen till ekvationen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{X_i^2 + \theta^2} = \frac{n}{2}.$$

Lösning. Väntevärdet är definierat som

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi\theta(1 + (x/\theta)^2)} dx = \frac{\theta}{2\pi} \left[\ln(1 + (x/\theta)^2)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

vilket blir $\infty - \infty$ och är därmed odefinierat. Likelihoodfunktionen ges av

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = \pi^{-n}\theta^{-n} \frac{1}{\prod_i (1 + x_i^2/\theta^2)}.$$

För att finna maximum, logaritemra och derivera och sätt till 0 och få

$$\frac{n}{\theta} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i^2 + \theta^2} = 0$$

vilket leder till den önskade ekvationen. Observera att den givna ekvationen är ekvivalent med

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\theta^2}{X_i^2 + \theta^2} = \frac{n}{2}.$$

6. (6p) Du vill bjuda på ett kalas. Antag att en bjuden person tackar ja med sannolikhet 3/4 oberoende av andra inbjudna.

(a) Om du ska bjuda n personer, hur ska du välja n för att göra sannolikheten att exakt tio av dem tackar ja så stor som möjligt?

(b) Om du bjuder åtta kvinnor och sex män, vad är sannolikheten att det, bland dem som tackar ja, blir jämna par.

(c) Om det kommer tio gäster på kalaset och samtliga dricker vin i en mängd som är normalfördelad med väntevärde 25 cl och standardavvikelse 10 cl oberoende av de andra gästerna, vad är sannolikheten att en box på 3 liter räcker?

Lösning. I (a) gäller att antalet inbjudna som tackar ja, X, är binomialfördelad med parametrar n och $3/4$. Därför gäller att

$$\mathbb{P}(X = 10) = \binom{n}{10} \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-10}$$

vilket ska maximeras över n. Genom att förkorta bort faktorer som inte beror av n, ser vi att det räcker att betrakta $\binom{n}{10}(1/4)^{n-10}$ vilket vi finner blir som störst för $n = 13$ genom prövning.

För (b), låt K vara antalat kvinnor som tackar ja och M antalet män som tackar ja. Då är $K \sim Bin(8, 3/4)$ och $M \sim Bin(6, 3/4)$ och vi ska beräkna $\mathbb{P}(K = M)$. Det gäller att

$$\mathbb{P}(K = M) = \sum_{i=0}^{6} \mathbb{P}(K = i)\mathbb{P}(M = i) = \binom{8}{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{8-i} \binom{6}{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{6-i} \approx 0.158.$$

För (c), låt D vara den totala mängden vin som dricks. Den är då normalfördelad med väntevärde 250 cl och standardavvikelse $10\sqrt{10}$ cl. Man söker

$$\mathbb{P}(D \leq 300) = \Phi\left(\frac{300 - 250}{10\sqrt{10}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \approx 0.943.$$

7. (5p) Låt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ vara en följd av positiva tal sådan att $\lambda_n \to \infty$ då $n \to \infty$ och $X_1, X_2, X_3, \ldots$ vara stokastiska variabler där X_n är Poissonfördelad med parameter λ_n.

(a) Visa att det för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

(b) Använd resultatet i (a) för att konstruera ett test av $H_0 : \lambda = 1$ mot $H_A : \lambda > 1$. Hur länge måste en Poissonprocess med intensitet λ observeras för att styrkan av testet ska bli minst 90 % om det korrekta värdet på λ är 1.1 och den använda signifikansnivån är 5 %?

Lösning. Om λ_n alla är heltal, kan vi skriva $X_n = \sum_{i=1}^{\lambda_n} Y_i$, där $Y_1, Y_2, \ldots$ är oberoende och $Poi(1)$-fördelade. Eftersom $\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_i] = 1$, ger CGS det önskade resultatet i (a). Om $\lambda = \lambda_n$ inte är ett heltal, skriv $a = \lambda - b$, där $b = \lfloor \lambda \rfloor$. Då kan vi skriva $X_n = X + Z$, där $X = \sum_{i=1}^{b} Y_i$ och Z är $Poi(a)$-fördelad och oberoende av Y_i:na. Därför är å ena sidan $\mathbb{P}(X_n \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq x)$ och å andra sidan, för godtyckligt $\epsilon > 0$,

$$Pro\left(\frac{X_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} > x\right) \leq \epsilon + \mathbb{P}\left(\frac{X - b}{\sqrt{b}} > x - \epsilon\right) + \mathbb{P}(Z \geq \epsilon\sqrt{\lambda}).$$

Eftersom den andra termen går mot 0 då $n \to \infty$ och ϵ är godtyckligt följer nu det allmänna resultatet av resultatet för heltalsvärda λ_n.

För del (b), observera att om man observerar Poissonprocessen i tid t och intensiteten är 1 och låter X vara antalet impulser som observerats till och med tid t, så är $(X - t)/\sqrt{t}$ approximativt standardnormal enligt (a). Det betyder att man förkastar H_0 på 5% signifikansnivå om $X > t + 1.64\sqrt{t}$. Under antagandet att intensiteten i själva verket är 1.1 så är X approximativt normal med väntevärde och varians $1.1t$. Det betyder att

$$\mathbb{P}(X > t + 1.64\sqrt{t}) \approx \mathbb{P}\left(\frac{X - 1.1t}{\sqrt{1.1t}} > \frac{1.64\sqrt{t} - 0.1t}{\sqrt{1.1t}}\right)$$

vilket vi vill ska bli 0.9. Detta ger $\Phi((0.1t - 1.64\sqrt{t})/\sqrt{1.1t}) = 0.9$, vilket i sin tur ger $0.1t - 1.64\sqrt{t} = 1.28\sqrt{1.1t}$, vilket till sist leder till $t = 890$ tidsenheter.

8. (6p) LASSO-regression från ett Bayesianskt perspektiv. Betrakta följande (multivariata) linjära regressionsmodell

$$Y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \epsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

där $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ är oberoende och standardnormalfördelade och β_1, β_2 och β_3 àpriori är oberoende och Laplacefördelade med parameter 1, dvs har täthetsfunktionen

$$f_\beta(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|},\ t \in \mathbb{R}.$$

Antag nu att vi har $n = 2$ och de två observationerna

$$(\mathbf{x}_1, Y_1) = ((1, 1, 1), -0.9),\ (\mathbf{x}_2, Y_2) = ((-1, 0, 1), -0.1).$$

Ge nu àposterioritätheten för $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ givet dessa observationer. Proportionalitetskonstanten behöver inte beräknas. Ange också maximum-posterior-skattningen (MAP) av β_k, $k = 1, 2, 3$, dvs de värden på β_k:na som maximerar àposterioritätheten.

Lösning. Vi har, med $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $t = (t_1, t_2, t_3)$ och $Y = (Y_1, Y_2)$, att

$$f_{\beta|Y}(t|y) \propto f_{Y|\beta}(y|t) f_\beta(t)$$

$$\propto \exp\left(-|t_1| - |t_2| - |t_3| - \frac{1}{2}(y_1 - t_1x_{11} - t_2x_{12} - t_3x_{13})^2 - \frac{1}{2}(y_2 - t_1x_{21} - t_2x_{22} - t_3x_{23})^2\right)$$

$$= \exp\left(-|t_1| - |t_2| - |t_3| - \frac{1}{2}(t_1 + t_2 + t_3 + 0.9)^2 - \frac{1}{2}(t_1 - t_3 - 0.1)^2\right),$$

vilket alltså, upp till en konstant, är àposterioritätheten. För att hitta MAP ska vi alltså minimera

$$g(t_1, t_2, t_3) = |t_1| + |t_2| + |t_3| + \frac{1}{2}(t_1 + t_2 + t_3 + 0.9)^2 + \frac{1}{2}(t_1 - t_3 - 0.1)^2.$$

Faktum är att minimum till detta uttryck antas då $t_1 = t_2 = t_3 = 0$. För att inse det krävs lite räknande. Först prövar man att finna ett lokalt minumum för vilket alla t_i är nollskilda. För att finna lokal extrempunkt till $at_1 + bt_2 + ct_3 + \frac{1}{2}(t_1 + t_2 + t_3 + 0.9)^2 + \frac{1}{2}(t_1 - t_3 - 0.1)^2$, tag de tre partiella derivatorna och sätt till 0 och få $2t_1 + t_2 = -a - 4/5$, $t_1 + t_2 + t_3 = -b - 9/10$

och $t_2 + 2t_3 = -c - 1$. Här finns lösning endast om $2b - a - c = 1$, vilket aldrig gäller då $a, b, c = \pm 1$, vilket är de intressanta fallen för oss. Man går sedan vidare med att sätta $t_i = 0$ för $i = 1, 2, 3$ i tur och ordning, därefter två av dem till 0 etc.

Vi får alltså att MAP ges av

$$\hat{\beta} = (0, 0, 0).$$

(Finessen med LASSO är just att man i allmänhet får att många variabler skattas till 0 och undviker därmed överanpassning. I det här fallet blev till och med alla parametrar skattade till 0.)

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.500	.504	.508	.512	.516	.520	.524	.528	.532	.536
0.1	.540	.544	.548	.552	.556	.560	.564	.568	.571	.575
0.2	.579	.583	.587	.591	.595	.599	.603	.606	.610	.614
0.3	.618	.622	.626	.629	.633	.637	.641	.644	.648	.652
0.4	.655	.659	.663	.666	.670	.674	.677	.681	.684	.688
0.5	.692	.695	.698	.702	.705	.709	.712	.716	.719	.722
0.6	.726	.729	.732	.736	.739	.742	.745	.749	.752	.755
0.7	.758	.761	.764	.767	.770	.773	.776	.779	.782	.785
0.8	.788	.791	.794	.797	.800	.802	.805	.808	.811	.813
0.9	.816	.819	.821	.824	.826	.829	.832	.834	.836	.839
1.0	.841	.844	.846	.848	.851	.853	.855	.858	.860	.862
1.1	.864	.867	.869	.871	.873	.875	.877	.879	.881	.883
1.2	.885	.887	.889	.891	.892	.894	.896	.898	.900	.902
1.3	.903	.905	.907	.908	.910	.912	.913	.915	.916	.918
1.4	.919	.921	.922	.924	.925	.926	.928	.929	.931	.932
1.5	.933	.934	.936	.937	.938	.939	.941	.942	.943	.944
1.6	.945	.946	.947	.948	.950	.951	.952	.952	.9545	.954
1.7	.955	.956	.957	.958	.959	.960	.961	.962	.962	.963
1.8	.964	.965	.966	.966	.967	.968	.969	.969	.970	.971
1.9	.971	.972	.973	.973	.974	.974	.975	.976	.976	.977
2.0	.977	.978	.978	.979	.979	.980	.980	.981	.981	.982
2.1	.982	.983	.983	.983	.984	.984	.985	.985	.985	.986
2.2	.986	.986	.987	.987	.988	.988	.988	.988	.989	.989
2.3	.989	.990	.990	.990	.990	.991	.991	.991	.991	.992
2.4	.992	.992	.992	.992	.993	.993	.993	.993	.993	.994
2.5	.994	.994	.994	.994	.995	.995	.995	.995	.995	.995
2.6	.995	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996	.996
2.7	.996	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997	.997
2.8	.997	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998
2.9	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.998	.999	.999

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

$\Phi(x)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
x	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

DF	0.95	0.975	0.99	0.995	DF	0.95	0.975	0.99	0.995
1	6.31	12.71	31.82	63.66	16	1.75	2.12	2.58	2.92
2	2.92	4.30	6.96	9.92	17	1.74	2.11	2.58	2.90
3	2.35	3.18	4,54	5.84	18	1.73	2.10	2.55	2.88
4	2.13	2.78	3.74	4.60	19	1.73	2.09	2.54	2.86
5	2.02	2.57	3.36	4.03	20	1.72	2.09	2.53	2.85
6	1.94	2.45	3.14	3.71	21	1.72	2.08	2.52	2.83
7	1.89	2.36	3.00	3.50	22	1.72	2.07	2.51	2.82
8	1.86	2.31	2.90	3.36	23	1.71	2.07	2.50	2.81
9	1.83	2.26	2.82	3.25	24	1.71	2.06	2.49	2.80
10	1.81	2.23	2.76	3.17	25	1.71	2.06	2.49	2.79
11	1.80	2.20	2.72	3.11	26	1.71	2.06	2.48	2.78
12	1.78	2.18	2.68	3.05	27	1.70	2.05	2.47	2.77
13	1.77	2.16	2.65	3.01	28	1.70	2.05	2.47	2.76
14	1.76	2.14	2.62	2.98	29	1.70	2.05	2.46	2.76
15	1.75	2.13	2.60	2.95	30	1.70	2.04	2.46	2.75

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

DF	0.025	0.05	0.95	0.975	DF	0.025	0.05	0.95	0.975
1	0.001	0.004	3.84	5.02	16	6.91	7.96	26.30	28.84
2	0.05	0.10	5.99	7.38	17	7.56	8.67	27.59	30.19
3	0.22	0.35	7.82	9.34	18	8.23	9.39	28.87	31.53
4	0.48	0.71	9.49	11.14	19	8.91	10.12	30.14	32.85
5	0.83	1.14	11.07	12.83	20	9.59	10.85	31.41	34.17
6	1.24	1.64	12.59	14.45	21	10.28	11.60	32.67	35.48
7	1.69	2.17	14.07	16.01	22	10.98	12.34	33.92	36.78
8	2.18	2.73	15.51	17.54	23	11.69	13.09	35.17	38.08
9	2.70	3.32	19.92	19.02	24	12.40	13.85	36.42	39.36
10	3.25	3.94	18.31	20.48	25	13.12	14.61	37.65	40.65
11	3.82	4.58	19.68	21.92	26	13.84	15.38	38.88	41.92
12	4.40	5.23	21.03	23.34	27	14.57	16.15	40.11	43.19
13	5.01	5.89	22.36	27.74	28	15.31	16.93	41.34	44.46
14	5.63	6.57	23.68	26.12	29	16.05	17.71	42.56	45.72
15	6.26	7.26	25.00	27.49	30	16.79	18.49	43.77	46.98

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

	2.5 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0.026	0.062	0.094	0.119	0.138	0.153	0.165	0.175	0.183
3	0.026	0.065	0.100	0.129	0.152	0.170	0.185	0.197	0.207
4	0.025	0.066	0.104	0.135	0.161	0.181	0.198	0.212	0.224
5	0.025	0.067	0.107	0.140	0.167	0.189	0.208	0.223	0.236
6	0.025	0.068	0.109	0.143	0.172	0.195	0.215	0.231	0.246
7	0.025	0.068	0.110	0.146	0.176	0.200	0.221	0.238	0.253
8	0.025	0.069	0.111	0.148	0.179	0.204	0.226	0.244	0.259
9	0.025	0.069	0.112	0.150	0.181	0.207	0.230	0.248	0.265
10	0.025	0.069	0.113	0.151	0.183	0.210	0.233	0.252	0.269
12	0.025	0.070	0.114	0.153	0.186	0.214	0.238	0.259	0.276
15	0.025	0.070	0.116	0.156	0.190	0.219	0.244	0.265	0.284
16	0.025	0.070	0.116	0.156	0.191	0.220	0.245	0.267	0.286
18	0.025	0.070	0.116	0.157	0.192	0.222	0.248	0.270	0.290
20	0.025	0.071	0.117	0.158	0.193	0.224	0.250	0.273	0.293
21	0.025	0.071	0.117	0.158	0.194	0.225	0.251	0.274	0.294
24	0.025	0.071	0.117	0.159	0.195	0.227	0.253	0.277	0.297
25	0.025	0.071	0.118	0.160	0.196	0.227	0.254	0.278	0.298
27	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.255	0.279	0.300
28	0.025	0.071	0.118	0.160	0.197	0.228	0.256	0.280	0.301
30	0.025	0.071	0.118	0.161	0.197	0.229	0.257	0.281	0.302

	95 % percentile								
s	$r = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79
4	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96
5	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74
6	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06
7	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64
8	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35
9	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14
10	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98
12	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75
15	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54
16	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49
18	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41
20	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35
21	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32
24	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25
25	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24
27	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20
28	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19
30	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16

	97.5 % percentile								
s	$r=2$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40
3	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42
4	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84
5	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62
6	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46
7	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76
8	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30
9	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96
10	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72
12	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37
15	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06
16	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99
18	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87
20	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77
21	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73
24	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64
25	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61
27	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57
28	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55
30	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n+1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$	n	0.025	0.05	$n(n+1)/2$
5	0	1	15	18	41	48	171
6	1	3	21	19	47	54	190
7	3	4	28	20	53	61	210
8	4	6	36	21	59	68	231
9	6	9	45	22	67	76	253
10	9	11	55	23	74	84	276
11	11	14	66	24	82	92	300
12	14	18	78	25	90	101	325
13	18	22	91	26	99	111	351
14	22	26	105	27	108	120	378
15	26	31	120	28	117	131	406
16	30	36	136	29	127	141	435
17	35	42	153	30	138	152	465

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m+n+1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

n	$P(W \leq c)$	$m = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0.025	3									
	0.05	3									
3	0.025	3	3								
	0.05	6	7								
4	0.025	3	6	11							
	0.05	3	7	12							
5	0.025	3	7	12	18						
	0.05	4	8	13	20						
6	0.025	3	8	13	19	27					
	0.05	4	9	14	21	29					
7	0.025	3	8	14	21	28	37				
	0.05	4	9	15	22	30	40				
8	0.025	4	9	15	22	30	39	50			
	0.05	5	10	16	24	32	42	52			
9	0.025	4	9	15	23	32	41	52	63		
	0.05	5	11	17	25	34	44	55	67		
10	0.025	4	10	16	24	33	43	54	66	79	
	0.05	5	11	18	27	36	46	57	70	83	
11	0.025	5	10	17	25	35	45	56	69	82	97
	0.05	5	12	19	28	38	48	60	73	87	101