Dugga
MVE301 och MVE395 Sannolikhet, statistik och risk

2017-04-27 kl. 18:00-21:00

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers
Denna dugga utgör grund för bonuspoäng enligt information på kurshemsidan. Inlämning sker genom att skicka in lösning i pdf-format till examinator senast kl 21:00. Observera att samarbete inte är tillåtet och betraktas som fusk.

---

1. (4p) En urna innehåller 8 röda, 6 blåa och 5 gröna bollar. Man väljer tre bollar på måfå ur urnan utan återläggning. Vad är sannolikheten att

(a) alla de valda bollarna har samma färg?

(b) alla de valda bollarna har olika färg?

Gör nu om experimentet med återläggning och besvara samma frågor.

Lösning. Vi börjar utan återläggning. Detta är en situation där man kan tillämpa det klassiska sannolikhetsmåttet, dvs den sökta sannolikheten är antalet "gynnsamma" utfall dividerat med totala antalet utfall. Vi väljer att ta hänsyn till ordning i täljare och nämnare. Då blir svaren

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3}{19 \cdot 18 \cdot 17} \approx 0.089$$

respektive

$$\frac{3! \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5}{19 \cdot 18 \cdot 17} \approx 0.248.$$

Med återläggning får man se upp eftersom det här är viktigt att ta hänsyn till ordning eftersom de olika fallen utan återläggning inte är lika sannolika. Nämnaren blir i båda uppgifterna 19^3 och täljarna $8^3 + 6^3 + 5^3$ respektive $3! \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5$ och svaren blir approximativt 0.124 respektive 0.210.

2. (4p) Läkaren Anna träffar patienten Pelle. Pelle har symptom som tyder på att han kan lida av åkomman S, som kräver operation. Anna har som policy att rekommendera operation utan vidare tester om hon känner sig minst 80 % säker på att patienten har S. Pelles symptom är sådana att Anna bedömer sannolikheten att Pelle har S till 60%, vilket alltså betyder att Anna inte vill rekommendera operation utan att skaffa mer information. Hon kan då välja att utföra test A, som ger ett garanterat positivt svar om patienten har S, men också för 40% av friska patienter. Hon kan också välja det dyrare och för patienten jobbigare testet B som också ger rätt svar för alla som har S, men endast för 10% av friska patienter. Vilket test bör Anna välja? Eller är det rent av så att inget av testerna är bra nog?

Lösning. Låt C vara händelsen att Pelle lider av S och T vara händelsen att testet är positivt. Anna bör välja det billigaste och minst besvärliga test som ger henne definitiv vägledning, dvs som ger $\mathbb{P}(C|T) \geq 0.8$. Enligt Bayes formel är

$$\mathbb{P}(C|T) = \frac{\mathbb{P}(T|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T|C^c)\mathbb{P}(C^c)}.$$

För båda testen är $\mathbb{P}(T|C) = 1$, $\mathbb{P}(C) = 0.6$. Dessutom är $\mathbb{P}(T|C^c) = 0.4$ för test A och $\mathbb{P}(T|C^c) = 0.1$ för test B. Detta ger för test A att $\mathbb{P}(C|T) \approx 0.79$ och för test B

$\mathbb{P}(T|C) \approx 0.94$. Alltså är test A otillräckligt för läkarens syfte, medan test B är tillräckligt och därmed bör väljas.

(En reflektion är att i praktiken är indata är behäftade med osäkerhet och våra resultat talar bara om att test A ligger på gränsen, medan test B är klart tillräckligt.)

3. (4p) Betrakta två oberoende stokastiska variabler X_1 och X_2 som är oberoende och exponentialfördelade med parametrar λ_1 respektive λ_2. Beräkna sannolikheten att $X_1 < X_2$.

Betrakta nu två köer. I en kö är betjäningstiderna oberoende och exponentialfördelade med parameter c. I en annan kö är betjäningstiderna oberoende och exponentialfördelade med parameter 1. Antag att det står två personer i den förstnämna kön och en person i den andra. Vilken av dem skulle du välja att ställa dig i? Svaret beror naturligtvis på c. Hur stort behöver c vara för att sannolikheten att du kommer fram snabbare till betjäning i kön med två personer är mer än 1/2?

Lösning. Eftersom X_1 och X_2 är oberoende gäller för den bivariata tätheten $f(x,y)$ att $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Därför är

$$\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \iint_{\{(x,y):0<x<y\}} f(x,y)dydx = \int_0^\infty f_1(x) \int_x^\infty f_2(x)dy\,dx$$

$$= \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

För den andra deluppgiften medför detta att sannolikheten att den första personen i kön med intensitet c är färdigbetjänad före personen i kön med intensitet 1 är $c/(c+1)$. Tack vare exponentialfördelningens glömskeegenskap gäller att den betingade sannolikheten att person 2 i kön med intensitet c också hinner före, givet att person 1 gör det, också är $c/(c+1)$. Därför söker vi det c som ger $(c/(c+1))^2 = 1/2$. Detta ger $c = \sqrt{2} + 1$.

Lycka till!
Johan Jonasson