Dugga
MVE301 och MVE395 Sannolikhet, statistik och risk

2019-04-17 kl. 15:15-17:30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Denna dugga utgör grund för bonuspoäng enligt information på kurshemsidan. Inlämning sker genom att maila lösning i pdf till examinator på jonasson@chalmers.se senast kl 17:30. Ett scannat foto av handskrivna lösningar fungerar bra. Observera att samarbete inte är tillåtet och betraktas som fusk.

---

1. (4p) Fyra personer skriver sitt namn på varsin lapp. Lapparna läggs i en hatt och sedan får de fyra personerna dra varsin lapp på måfå. Låt X vara antalet personer som får en lapp med sitt eget namn. Bestäm frekvensfunktion, väntevärde och varians för X.

Lösning: Om vi tänker oss de fyra personerna ställda på en rad och att lapparna läggs i en rad, en lapp för varje person, så inser vi att det handlar om att räkna antalet perumationer av lapparna som gör att k personer, $k = 1, 2, 3, 4$, får en lapp med sitt eget namn. Antalet permutationer som ger $k = 4$ är uppenbarligen 1. Antalet som ger $k = 2$ är

$$\binom{4}{2} = 6.$$

Antalet permutationer som ger $k = 1$ är

$$4 \cdot 2 = 8$$

där den sista faktorn kommer från observationen att antalet permuationer av tre element $1, 2, 3$ där inget element i finns på position i är 2. Fallet $k = 3$ är uppenbarligen omöjligt, vilket lämnar $24 - 1 - 6 - 8 = 9$ permutationer som ger $k = 0$. Frekvensfunktionen p för X ges alltså av

$$p(0) = 3/8,\ p(1) = 1/3,\ p(2) = 1/4,\ p(4) = 1/24.$$

Vi har då

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{24} = 1.$$

Vi har också $\mathbb{E}[X^2] = 1/3 + 4(1/4) + 16(1/24) = 2$, så

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

2. (4p) Låt Θ vara en stokastisk variabel som är likformigt fördelad mellan 0 och 1 och sedan, när Θ är vald, gör tre kast med en slant som ger klave med sannolikhet Θ. Låt Y vara antalet klave på de tre kasten. Bestäm frekvensfunktionen för Y.

Lösning: Det gäller att $\mathbb{P}(Y = k|\Theta = \theta) = \binom{3}{k}\theta^k(1-\theta)^{3-k}$. Därför gäller enligt totala sannolikhetslagen att

$$\mathbb{P}(Y = k) = \int_0^1 \binom{3}{k}\theta^k(1-\theta)^{3-k} f_\Theta(\theta)d\theta = \binom{3}{k}\int_0^1 \theta^k(1-\theta)^{3-k}d\theta = \frac{1}{4},$$

$k = 0, 1, 2, 3.$

3. (4p) Vid en väg kommer motorcyklar som en Poissonprocess med intensitet 2 och bilar som en Poissonprocess med intensitet 5. De två processerna är oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att det hinner komma minst två bilar före nästa motorcykel?

Lösning: Låt T_b vara tiden till nästa bil och T_m tiden till nästa motorcykel. Dessa är oberoende och $exp(5)$- respektive $exp(2)$-fördelade oavsett vad som hänt fram tills nu. Sannolikheten att nästa bil kommer före nästa motorcykel är

$$\mathbb{P}(T_m > T_b) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T_m > T_b | T_b = x) f_{T_b}(x) dx = \int_0^\infty e^{-2x} 5e^{-5x} dx = \frac{5}{7}.$$

Enligt glömskeegenskapen gäller då att sannolikheten att det kommer minst två bilar före nästa motorcykel är $(5/7)^2 = 25/49$.

Lycka till!
Johan Jonasson