Sannolikhet och statistik XV

Johan Jonasson

May 2019

Korrespondensen mellan test och konfidensintervall.
Antag att θ är endimensionell. Skapa ett konfidensintervall

$$T_1 \leq \theta \leq T_2$$

med konfidensgrad $1 - \alpha$. Detta betyder att

$$\mathbb{P}(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1 - \alpha.$$

Vill testa $H_0 : \theta = \theta_0$ mot någon alt.hypotes H_A. Förkasta H_0 om $\theta_0 \notin [T_1, T_2]$. Detta ger ett test på sign.nivå α, ty

$$\mathbb{P}_{H_0}(\theta_0 \notin [T_1, T_2]) = \alpha.$$

Konfidensintervallet väljs så att $\theta_0 \notin [T_1, T_2]$ talar till förmån för H_A framför H_0.

Exempel: $X_1, \ldots, X_n$ sp på $N(\mu, \sigma^2)$. Skapa symmetriskt konfidensintervall för μ:

$$\mu \in \overline{X} \pm F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \alpha/2)\frac{s}{\sqrt{n}}$$

med konfidensgrad $1 - \alpha$. Enl receptet ovan ska vi förkasta $H_0 : \mu = \mu_0$ till förmån för $H_A : \mu \neq \mu_0$ om

$$\mu_0 \notin \overline{X} \pm F^{-1}_{t_{n-1}}(1 - \alpha/2)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Exakt vad vi kom fram till förut. $\square$

Att jämföra två stickprov. Testa om en medicin sänker blodsockret. Gör en dubbelblind studie: samla ett stickprov $X_1, \ldots, X_n$ av blodsockervärden från försökspersoner som tagit medicinen och ett stickprov $Y_1, \ldots, Y_m$ från personer som tagit placebo.

Antag att $X_k \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ och $Y_k \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Vill testa $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ mot $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (eller $H_A : \mu_X < \mu_Y$) / göra konfintervall för $\mu_X - \mu_Y$. Basera på $\overline{X} - \overline{Y}$.

Fallet σ_X^2 och σ_Y^2 kända. Obs:

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{1}{n}\sigma_X^2 + \frac{1}{m}\sigma_Y^2\right).$$

Ger konfidensintervall

$$\mu_X - \mu_Y \in \overline{X} - \overline{Y} \pm \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{n}\sigma_X^2 + \frac{1}{m}\sigma_Y^2}.$$

Fallet σ_X^2 och σ_Y^2 okända. Antag att σ_X^2 och σ_Y^2 är *lika*: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$. Skatta σ^2 med den poolade stickprovsvariansen:

$$s_P^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 + \sum_{k=1}^{m}(Y_k - \overline{Y})^2}{n+m-2} = \frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2}.$$

Det visar sig att

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{s_P\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t_{n+m-2}.$$

Ger symmetriskt konfintervall

$$\mu_X - \mu_Y \in \overline{X} - \overline{Y} \pm F_{t_{n+m-2}}^{-1}(1-\alpha/2)s_P\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$$

med konf.grad $1-\alpha$. Nedåt begr konfintervall:

$$\mu_X - \mu_Y \geq \overline{X} - \overline{Y} - F_{t_{n+m-2}}^{-1}(1-\alpha)s_P\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}.$$

Exempel: Böjhållfasthet hos tegel vid olika bränntemperatur:

$$700^\circ C : 147\ 140\ 121\ 138\ 120\ 131$$

$$800^\circ C : 193\ 227\ 201\ 212\ 207$$

Låt μ_X och μ_Y vara förv hållf vid 700 reps 800 grader. Gör 99.9 procent symmetriskt konfintervall för $\mu_Y - \mu_X$.
Vi antar att data är normalförd med samma varians. Vi har

$$\overline{X} = 132.8,\ s_X^2 = 10.83^2,\ \overline{Y} = 208.0,\ s_Y^2 = 12.77^2.$$

$$s_P^2 = \frac{5s_X^2 + 4s_Y^2}{9} = 11.73^2.$$

Konfintervallet blir nu

$$\begin{aligned}\mu_Y - \mu_X &\in \overline{Y} - \overline{X} \pm F_{t_9}^{-1}(0.9995)s_P\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}} \\ &= 75.2 \pm 4.78 \cdot 11.73 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}} \\ &= 75.2 \pm 34.0.\end{aligned}$$

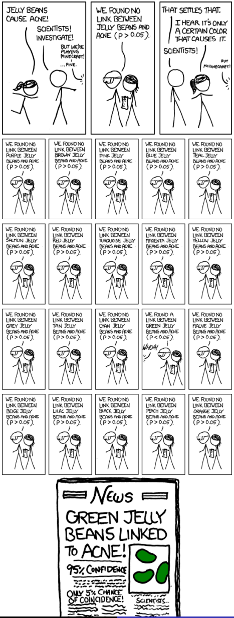
□

Tjuvkikande. I alla datamängder finns slumpmässigt uppkomna mönster. Sådana mönster kan aldrig bevisas av den datamängd man fann dem i. De kan dock ge hypoteser som kan prövas med nya data.

Sensmoral: Bestäm alltid vilka tester som ska göras innan du tittar på data. Helst redan innan du samlar in data.

Multipeltestning. Antag att vi testar 100 sanna nollhypoteser på 5% signifikansnivå. I genomsnitt kommer vi att fem gånger *felaktigt* förkasta nollhypotesen. Det kan bli många fel i ett statistikerliv.

Sensmoral: Testa inte om du inte har goda skäl att tro att nollhypotesen är falsk.


JELLY BEANS CAUSE ACNE!
SCIENTISTS! INVESTIGATE!
BUT WE'RE PLAYING MINECRAFT!
... FINE.
WE FOUND NO LINK BETWEEN JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
THAT SETTLES THAT.
I HEAR IT'S ONLY A CERTAIN COLOR THAT CAUSES IT.
SCIENTISTS!
BUT MINECRAFT!
WE FOUND NO LINK BETWEEN PURPLE JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN BROWN JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN PINK JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN BLUE JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN TEAL JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN SALMON JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN RED JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN TURQUOISE JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN MAGENTA JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN YELLOW JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN GREY JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN TAN JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN CYAN JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND A LINK BETWEEN GREEN JELLY BEANS AND ACNE (P < 0.05).
WHOA!
WE FOUND NO LINK BETWEEN MAUVE JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN BEIGE JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN LILAC JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN BLACK JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN PEACH JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
WE FOUND NO LINK BETWEEN ORANGE JELLY BEANS AND ACNE (P > 0.05).
News
GREEN JELLY BEANS LINKED TO ACNE!
95% CONFIDENCE
ONLY 5% CHANCE OF COINCIDENCE!
SCIENTISTS...