

Sannolikhet och statistik VIII

Johan Jonasson

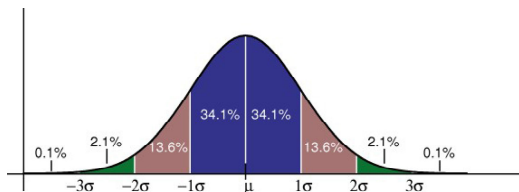
April 2019

Normalfördelning. Uppstår (approximativt) av summan av många små slumpmässiga bidrag. Därför den vanligaste av alla fördelningar.

Definition: En kont sv X sägs vara *normalfördelad med parametrar μ och σ^2* om dess täthet ges av

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kortform $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



För $X \sim N(0, 1)$ skrivs tätheten som $\varphi(x)$ och fördelningsfunktionen som $\Phi(x)$. M.a.o.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

Proposition: Låt $Z \sim N(0, 1)$ och $X = \mu + \sigma Z$. Då är $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Omvänt: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Bevis:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\mu + \sigma Z \leq x) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \varphi(t) dt.$$

Substituera $t = (s - \mu)/\sigma$, vilket ger $dt = (1/\sigma)ds$ och $t = (x - \mu)/\sigma \Leftrightarrow s = x$, så integralen blir

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{s - \mu}{\sigma}\right) ds.$$

Men $(1/\sigma)\varphi((s - \mu)/\sigma)$ är tätheten för $N(\mu, \sigma^2)$, så X har önskad förd.fkn. \square

Låt $Z \sim N(0, 1)$. Vi har $\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$. Integralen är 0 eftersom φ är en jämn funktion, så $\mathbb{E}[Z] = 0$.

Vidare är $\mathbb{E}[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx$. Fknen $x\varphi(x)$ har primitiv fkn $-\varphi(x)$. Partiell integration ger

$$\mathbb{E}[Z^2] = [-x\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

Alltså: $\text{Var}(Z) = 1$.

För $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, skriv $X = \mu + \sigma Z$ och få

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2.$$

Obs att

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

så Φ är den enda förd.fkn för normalförd man behöver veta.

Tack vare symmetrin hos φ gäller

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

så man behöver bara $\Phi(x)$ för $x > 0$. Fknen Φ finns i tabeller och mjukvara.

Exempel: Längden X av en på måfå vald svensk man är approx normalförd med vv 180 cm och stdavv 5 cm. Vi får t.ex.

$$\mathbb{P}(X \leq 176) \approx \Phi\left(\frac{176 - 180}{5}\right) = \Phi(-0.8) = 1 - \Phi(0.8) \approx 0.21.$$

$$\mathbb{P}(X \geq 210) \approx 1 - \Phi\left(\frac{210 - 180}{5}\right) = 1 - \Phi(6) \approx 9.9 \cdot 10^{-10}.$$

Normalfördelningar är i tillämpningar alltid approximativa och fungerar dåligt för extrema sannolikheter. □

Exempel: Marmeladbolaget säljer burkar med 400 g apelsinmarmelad. Pga slumpmekanismer utanför bolagets kontroll är den verkliga vikten av marmelad som fylls i en given burk normalfördelad med en standaravvikelse på 4 g. Hur mycket marmelad ska bolaget sikta på att fylla i en given burk för att sannolikheten att den verkliga vikten blir minst 400 g ska vara 0.95?

Vad man siktar på är rimligt att tolka som väntevärdet av vikten i en burk. Skriv μ för detta vv. Vi har alltså att $X \sim N(\mu, 4^2)$ och ska välja μ så att $\mathbb{P}(X > 400) = 0.95$. dvs så att

$$\mathbb{P}(X > 400) = 1 - \Phi\left(\frac{400 - \mu}{4}\right) = \Phi\left(\frac{\mu - 400}{4}\right) = 0.95.$$

Nu är $\Phi^{-1}(0.95) \approx 1.64$ (dvs $\Phi(1.64) \approx 0.95$), så μ ska uppfylla

$$\frac{\mu - 400}{4} \approx 1.64$$

dvs

$$\mu = 400 + 4 \cdot 1.64 \approx 406.6.$$



Lite standardvärden på Φ^{-1} :

x	$\Phi^{-1}(x)$
0.9	1.28
0.95	1.64
0.975	1.96
0.99	2.33
0.995	2.58