Sannolikhet och statistik A2

Johan Jonasson

Maj 2019

Summor av oberoende sv. Om X och Y är oberoende, vad är förd för $Z = X + Y$? Antag att (X, Y) kont.

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X + Y \leq z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(x + Y \leq z | X = x) f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z - x) f_X(x) dx. \end{aligned}$$

Under enkla villkor (som vi inte går in på) kan man derivera under integraltecknet och få

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z - x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z - x) f_X(x) dx.$$

Om $X, Y > 0$ får man

$$f_Z(z) = \int_0^z f_Y(z - x) f_X(x) dx.$$

Om (X, Y) diskret får man

$$p_Z(z) = \sum_{x \in V_X} p_Y(z-x)p_X(x).$$

Vi har redan utnyttjat detta till att visa att X_1, X_2 oberoende och

$$X_1 \sim Poi(\lambda_1),\ X_2 \sim Poi(\lambda_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Exempel: Enligt CGS måste det gälla att om $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ och X_1, X_2 oberoende medför att $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Låt oss kolla i fallet $\mu_1 = \mu_2 = 0$ och $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

$$
\begin{aligned}
f_{X_1+X_2}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int e^{-\left(t-\frac{1}{2}z\right)^2-\frac{1}{4}z^2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{4}z^2} \int \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(t-\frac{1}{2}z\right)^2} dt.
\end{aligned}
$$

Under integraltecknet står täthet för $N(z/2, 1/2)$, så

$$
f_{X_1+X_2}(z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{4}z^2},
$$

dvs tätheten för $N(0, 2)$. $\square$

Exempel: Låt X, Y vara oberoende och $exp(\lambda)$-fördelade.

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-t)} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dt = \lambda^2 z e^{-\lambda z}.$$

M.a.o.: $X + Y \sim \Gamma(2, \lambda)$. $\square$

Momentgenererande funktion. För en sv X ges den momentgenerarande funktionen M_X av

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}],\ t \in \mathbb{R}.$$

Om X är kont och positiv med täthet f, får man

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} f(x)dx = \mathcal{L}_f(-t).$$

Därför kan vi ana (men inte visa) att om man vet M_X för alla t i en omgivning av 0, så vet man även f. Detta är sant och gäller för alla sv X.

Proposition: Om X och Y är oberoende gäller

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t).$$

Bevis:

$$M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX}e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}] = M_X(t)M_Y(t),$$

där den tredje likheten följer av ober. $\square$

Om vi får derivera innanför väntevärdet (och det får vi) får vi

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[Xe^{tX}].$$

Detta ger

$$M_X'(0) = \mathbb{E}[X].$$

Vi får också

$$M_X''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[X^2e^{tX}].$$

Alltså

$$M_X''(0) = \mathbb{E}[X^2].$$

Generellt:

$$M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k],\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Exempel: Låt $X \sim Poi(\lambda)$.

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Om X_1, X_2 ober och $Poi(\lambda_1)$ resp $Poi(\lambda_2)$, får vi

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}.$$

Vi ser att $X_1 + X_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$. $\square$

Exempel: Låt $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Kvadratkomplettera i exponenten och få att hl är

$$e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-(\mu+\sigma^2 t))^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Fknen i integralen är täthet för $N(\mu + \sigma^2 t, \sigma^2)$, så

$$M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}.$$

Om nu X_1, X_2 är ober och $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ resp $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, får vi

$$M_{X_1+X_2}(t) = e^{(\mu_1+\mu_2)t + (\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}$$

dvs $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. $\square$

En generalisering av inverterbarheten: Antag att X och $X_1, X_2, \ldots$ är kont. Då har vi att om $M_{X_n}(t) \to M_X(t)$ för alla t, så gäller att $\mathbb{P}(X_n \leq x) \to \mathbb{P}(X \leq x)$ för alla x.

Bevisskiss av CGS. Kom ihåg CGS: Om $X_1, X_2, \ldots$ är iid och fördelade som en sv X med $\mathbb{E}[X] = \mu$ och $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sigma^2 < \infty$ gäller

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) \to \Phi(x).$$

Räcker att visa för $\mu = 0$ och $\sigma^2 = 1$. Taylorutveckla M_X kring 0 till ordning 2:

$$M_X(s) \approx M_X(0) + sM_X'(0) + \frac{1}{2}s^2 M_X''(0) = 1 + s\mu + \frac{1}{2}s^2(\mu^2 + \sigma^2) = 1 + \frac{1}{2}s^2.$$

Vill visa att $M_{S/\sqrt{n}}(t) \to M_{N(0,1)}(t) = e^{t^2/2}$.

Men

$$
\begin{aligned}
M_{S_n/\sqrt{n}}(t) &= \mathbb{E}[e^{tS_n/\sqrt{n}}] = M_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\
&= M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \approx \left(1+\frac{t^2}{2n}\right)^n \\
&\to e^{t^2/2}.
\end{aligned}
$$

$\square$

***p*-värde.** Test av H_0 mot H_A. Testets p-värde, P, är det minsta tal α sådant att H_0 kan förkastas till förmån för H_A på signifikansnivå α. Dvs P är det α där H_0 är precis på gränsen till att förkastas.

Mer formellt och generellt: Låt $\mathcal{X}$ beteckna data. För varje α, finn lämplig A_α så att $\mathbb{P}_{H_0}(\mathcal{X} \notin A_\alpha) = \alpha$. Testet förkastar H_0 på signnivå α om $\mathcal{X} \notin A_\alpha$. Antag att A_α:na är valda så att $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \supseteq A_{\alpha_2}$. Då är

$$P = \min\{\alpha : \mathcal{X} \notin A_\alpha\}.$$

Om θ är en endim parameter, gör konfintervall

$$T_1(\mathcal{X}, \alpha) \leq \theta \leq T_2(\mathcal{X}, \alpha) \qquad (1-\alpha)$$

Man förkastar man $H_0 : \theta = \theta_0$ på signnivå α om $\theta_0 \notin [T_1(\mathcal{X}, \alpha), T_2(\mathcal{X}, \alpha)]$. Då är

$$P = \min\{\alpha : \theta_0 \notin [T_1(\mathcal{X}, \alpha), T_2(\mathcal{X}, \alpha)]\}.$$

Typiskt är intervallgränserna kontinuerliga i α och då blir P lika med det α som ger $\theta_0 = T_1(\mathcal{X}, \alpha)$ eller $\theta_0 = T_2(\mathcal{X}, \alpha)$.

Exempel: Låt $X_1, \ldots, X_n$ vara ett sp på $N(\mu, \sigma^2)$. Testa $\mu = 0$ mot $\mu \neq 0$. Antag att $n = 10$, $\overline{X} = 1.7$, $s^2 = 1.5$. Vad är testets p-värde? Konfintervall

$$\mu \in \overline{X} \pm F_{t_9}^{-1}(1 - \alpha/2)\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Punkten 0 hamnar på gränsen om $\overline{X} = F_{t_9}^{-1}(1 - \alpha/2)s/\sqrt{n}$, dvs

$$F_{t_9}^{-1}(1 - \alpha/2) = \frac{\overline{X}\sqrt{n}}{s} = \frac{1.7\sqrt{10}}{\sqrt{1.5}} = 4.39.$$

Alltså $1 - \alpha/2 = F_{t_9}(4.39) = 1 - 0.0009$, så $\alpha = 0.0018$. Vi har alltså

$$P \approx 0.0018.$$