

Projekt 3: Slumpgrafer

2 april 2019

En graf är en mängd av noder, $V = \{1, \dots, n\}$, och en mängd kanter $E \subset \{ij : 1 \leq i < j \leq n\}$, dvs en delmängd av mängden av par av noder, där $ij \in E$ ska tolkas som att det finns en kant mellan noderna i och j . Kort sagt består grafen av ett antal noder och kanter mellan en del av paren av noder och man skriver $G = (V, E)$. En graf kallas sammanhängande om det går att gå från varje nod till varje annan nod via en följd av kanter. Om grafen inte är sammanhängande delas den på ett naturligt sätt upp i sina sammanhängande komponenter, som är de största delgraferna som är sammanhängande i sig själva.

En slumpgraf G_n enligt den s.k. $G(n, p)$ -modellen ges av att man för varje $1 \leq i < j \leq n$ sätter en kant ij med sannolikhet p , oberoende för olika (i, j) . Man är intresserad av egenskaper hos G_n när n växer. Uppgiften i det här projektet är att med simuleringar i Matlab försöka gissa svaren på följande frågor.

1. Hur stort behöver $p = p_n$ vara som funktion av n för att sannolikheten att den största sammanhängande komponenten innehåller minst $0.25n$ noder går mot 1 då $n \rightarrow \infty$?
2. Hur stort behöver $p = p_n$ vara för att sannolikheten att G_n är sammanhängande går mot 1 då $n \rightarrow \infty$?
3. Om $p = 1/n$, vad är den asymptotiska fördelningen för antalet trianglar? (En triangel är en trippel noder u, v, w sådan att alla tre kanterna uv, uw och vw finns med i G_n .)
4. Om $p = 1/n$, vad blir den asymptotiska fördelningen för antalet isolerade noder (dvs noder som inte har en enda kant)?
5. Om $p = 1/2$, hur stor blir den största klicken (dvs en mängd noder där det finns en kant mellan varje par av noder)?

Simuleringar görs lämpligen i termer av slumpmässiga grannmatriser. Matlab har kommandon för att se grannmatriser som grafer och att plocka fram de sammanhängande komponenterna. Pröva med olika n för att försöka se ett mönster.

Läs också i Janson-Luschak-Ruzinski (1999): Random graphs, och finn de rätta svaren på frågorna.