

Tentamen

MVE395 Sannolikhet, statistik och risk

2015-08-18 kl. 8.30-12.30

Examinator: Johan Jonasson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johan Jonasson, telefon: 0706-985223
031-7723546

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare. Två blad (dvs fyra sidor) handskrivna anteckningar. Tabeller finns längst bak på tentamenstenen.

Denna tentamen utgör grunden för betygssättning. För betyg 3 krävs minst 20 poäng, för betyg 4 minst 30 poäng och för betyg 5 minst 40 poäng.

- (5p) Antag att det i en urna ligger N stycken bollar, numrerade från 1 till N . Låt $n \leq N$ och välj på måfå ut n av de N bollarna. Låt Y vara det största talet som finns på någon av de valda bollarna. Beräkna frekvensfunktionen (pmf) för Y .
- (6p) Antag att årsnederbörden i Göteborg är normalfördelad med väntevärde 800 (millimeter) och standardavvikelse 150. Vad är sannolikheten att det minst två år av tio kommer mer än 1000 mm nederbörd? Man kan anta att nederbörden olika år är oberoende.
- (6p) Låt X vara en stokastisk variabel med tätheten (density)

$$f(x) = 2x, 0 \leq x \leq 1.$$

Låt $Y = e^X$. Bestäm tätheten för Y och beräkna $\mathbb{E}[Y]$ och $\text{Var}[Y]$.

- (5p) Antag att X är exponentialfördelad med parameter β , där β själv antas vara en stokastisk variabel med exponentialfördelning med parameter 1 (dvs à-priorifördelningen för β är $\exp(1)$). Bestäm à-posteriorifördelningen för β efter att ha observerat $X = x$.
- Sannolikheten p att ett SJ-tåg ska vara försenat med mer än fem minuter, varierar från dag till dag, på grund av varierande förutsättningar. För att undersöka p en viss dag och testa $H_0 : p = 0.3$ mot $H_A : p > 0.3$ kontrollerades n ankomster och registrerades hur försenade dessa var.
 - (3p) Antag att $n = 80$ och att man fann vid 30 av dessa var mer än fem minuter sena. Bestäm approximativt testets p -värde. (Observera att p :et i ordet p -värde inte ska förväxlas med parametern p som man testar). Kan man förkasta H_0 på 5% signifikansnivå? Vilka antaganden gör du?
 - (3p) Vad blir den approximativa styrkan (power) för $p = 0.5$ om man testar på 5% signifikansnivå? (Dvs om $p = 0.5$, vad sannolikheten att förkasta H_0 ?.)
- En stokastisk variabel X sägs vara Paretofördelad med parameter θ om den har täthet (density)

$$f(x) = \frac{1}{\theta x^{1+1/\theta}}, x \geq 1.$$

Antag att x_1, \dots, x_n är mätdata från ett stickprov på en Paretofördelad stokastisk variabel.

- (2p) Bestäm ML-skattningen $\hat{\theta}$ av θ .
- (2p) Beräkna $\mathbb{E}[\ln X]$ som funktion av θ om X är fördelad enligt ovan.
- (2p) Är $\hat{\theta}$ väntevärdesriktig (unbiased)?

7. (6p) Antag att X har den momentgenererande funktionen $M(t)$. Låt $\Psi(t) = \ln M(t)$. Visa att

$$\Psi''(0) = \text{Var}[X].$$

Lycka till!
Johan Jonasson

Tabell 1: Values of the cdf $\Phi(x)$ of the standard normal distribution [e.g., $\Phi(1.41) = 0.921$]

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|
| 0.0 | .500 | .504 | .508 | .512 | .516 | .520 | .524 | .528 | .532 | .536 |
| 0.1 | .540 | .544 | .548 | .552 | .556 | .560 | .564 | .568 | .571 | .575 |
| 0.2 | .579 | .583 | .587 | .591 | .595 | .599 | .603 | .606 | .610 | .614 |
| 0.3 | .618 | .622 | .626 | .629 | .633 | .637 | .641 | .644 | .648 | .652 |
| 0.4 | .655 | .659 | .663 | .666 | .670 | .674 | .677 | .681 | .684 | .688 |
| 0.5 | .692 | .695 | .698 | .702 | .705 | .709 | .712 | .716 | .719 | .722 |
| 0.6 | .726 | .729 | .732 | .736 | .739 | .742 | .745 | .749 | .752 | .755 |
| 0.7 | .758 | .761 | .764 | .767 | .770 | .773 | .776 | .779 | .782 | .785 |
| 0.8 | .788 | .791 | .794 | .797 | .800 | .802 | .805 | .808 | .811 | .813 |
| 0.9 | .816 | .819 | .821 | .824 | .826 | .829 | .832 | .834 | .836 | .839 |
| 1.0 | .841 | .844 | .846 | .848 | .851 | .853 | .855 | .858 | .860 | .862 |
| 1.1 | .864 | .867 | .869 | .871 | .873 | .875 | .877 | .879 | .881 | .883 |
| 1.2 | .885 | .887 | .889 | .891 | .892 | .894 | .896 | .898 | .900 | .902 |
| 1.3 | .903 | .905 | .907 | .908 | .910 | .912 | .913 | .915 | .916 | .918 |
| 1.4 | .919 | .921 | .922 | .924 | .925 | .926 | .928 | .929 | .931 | .932 |
| 1.5 | .933 | .934 | .936 | .937 | .938 | .939 | .941 | .942 | .943 | .944 |
| 1.6 | .945 | .946 | .947 | .948 | .950 | .951 | .952 | .952 | .9545 | .954 |
| 1.7 | .955 | .956 | .957 | .958 | .959 | .960 | .961 | .962 | .962 | .963 |
| 1.8 | .964 | .965 | .966 | .966 | .967 | .968 | .969 | .969 | .970 | .971 |
| 1.9 | .971 | .972 | .973 | .973 | .974 | .974 | .975 | .976 | .976 | .977 |
| 2.0 | .977 | .978 | .978 | .979 | .979 | .980 | .980 | .981 | .981 | .982 |
| 2.1 | .982 | .983 | .983 | .983 | .984 | .984 | .985 | .985 | .985 | .986 |
| 2.2 | .986 | .986 | .987 | .987 | .988 | .988 | .988 | .988 | .989 | .989 |
| 2.3 | .989 | .990 | .990 | .990 | .990 | .991 | .991 | .991 | .991 | .992 |
| 2.4 | .992 | .992 | .992 | .992 | .993 | .993 | .993 | .993 | .993 | .994 |
| 2.5 | .994 | .994 | .994 | .994 | .995 | .995 | .995 | .995 | .995 | .995 |
| 2.6 | .995 | .996 | .996 | .996 | .996 | .996 | .996 | .996 | .996 | .996 |
| 2.7 | .996 | .997 | .997 | .997 | .997 | .997 | .997 | .997 | .997 | .997 |
| 2.8 | .997 | .998 | .998 | .998 | .998 | .998 | .998 | .998 | .998 | .998 |
| 2.9 | .998 | .998 | .998 | .998 | .998 | .998 | .998 | .998 | .999 | .999 |

Tabell 2: Values of $\Phi(x)$ commonly used in confidence intervals and tests, and the corresponding x values

| $\Phi(x)$ | 0.90 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|-----------|------|------|-------|------|-------|
| x | 1.28 | 1.64 | 1.96 | 2.33 | 2.58 |

Tabell 3: Percentiles of the t distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{t_7}(1.89) = 0.95$]

| DF | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 | DF | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
|----|------|-------|-------|-------|----|------|-------|------|-------|
| 1 | 6.31 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 16 | 1.75 | 2.12 | 2.58 | 2.92 |
| 2 | 2.92 | 4.30 | 6.96 | 9.92 | 17 | 1.74 | 2.11 | 2.58 | 2.90 |
| 3 | 2.35 | 3.18 | 4.54 | 5.84 | 18 | 1.73 | 2.10 | 2.55 | 2.88 |
| 4 | 2.13 | 2.78 | 3.74 | 4.60 | 19 | 1.73 | 2.09 | 2.54 | 2.86 |
| 5 | 2.02 | 2.57 | 3.36 | 4.03 | 20 | 1.72 | 2.09 | 2.53 | 2.85 |
| 6 | 1.94 | 2.45 | 3.14 | 3.71 | 21 | 1.72 | 2.08 | 2.52 | 2.83 |
| 7 | 1.89 | 2.36 | 3.00 | 3.50 | 22 | 1.72 | 2.07 | 2.51 | 2.82 |
| 8 | 1.86 | 2.31 | 2.90 | 3.36 | 23 | 1.71 | 2.07 | 2.50 | 2.81 |
| 9 | 1.83 | 2.26 | 2.82 | 3.25 | 24 | 1.71 | 2.06 | 2.49 | 2.80 |
| 10 | 1.81 | 2.23 | 2.76 | 3.17 | 25 | 1.71 | 2.06 | 2.49 | 2.79 |
| 11 | 1.80 | 2.20 | 2.72 | 3.11 | 26 | 1.71 | 2.06 | 2.48 | 2.78 |
| 12 | 1.78 | 2.18 | 2.68 | 3.05 | 27 | 1.70 | 2.05 | 2.47 | 2.77 |
| 13 | 1.77 | 2.16 | 2.65 | 3.01 | 28 | 1.70 | 2.05 | 2.47 | 2.76 |
| 14 | 1.76 | 2.14 | 2.62 | 2.98 | 29 | 1.70 | 2.05 | 2.46 | 2.76 |
| 15 | 1.75 | 2.13 | 2.60 | 2.95 | 30 | 1.70 | 2.04 | 2.46 | 2.75 |

Tabell 4: Percentiles of the chi-square distribution with DF degrees of freedom [e.g., $F_{\chi^2_{20}}(10.85) = 0.05$]

| DF | 0.025 | 0.05 | 0.95 | 0.975 | DF | 0.025 | 0.05 | 0.95 | 0.975 |
|----|-------|-------|-------|-------|----|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 0.001 | 0.004 | 3.84 | 5.02 | 16 | 6.91 | 7.96 | 26.30 | 28.84 |
| 2 | 0.05 | 0.10 | 5.99 | 7.38 | 17 | 7.56 | 8.67 | 27.59 | 30.19 |
| 3 | 0.22 | 0.35 | 7.82 | 9.34 | 18 | 8.23 | 9.39 | 28.87 | 31.53 |
| 4 | 0.48 | 0.71 | 9.49 | 11.14 | 19 | 8.91 | 10.12 | 30.14 | 32.85 |
| 5 | 0.83 | 1.14 | 11.07 | 12.83 | 20 | 9.59 | 10.85 | 31.41 | 34.17 |
| 6 | 1.24 | 1.64 | 12.59 | 14.45 | 21 | 10.28 | 11.60 | 32.67 | 35.48 |
| 7 | 1.69 | 2.17 | 14.07 | 16.01 | 22 | 10.98 | 12.34 | 33.92 | 36.78 |
| 8 | 2.18 | 2.73 | 15.51 | 17.54 | 23 | 11.69 | 13.09 | 35.17 | 38.08 |
| 9 | 2.70 | 3.32 | 19.92 | 19.02 | 24 | 12.40 | 13.85 | 36.42 | 39.36 |
| 10 | 3.25 | 3.94 | 18.31 | 20.48 | 25 | 13.12 | 14.61 | 37.65 | 40.65 |
| 11 | 3.82 | 4.58 | 19.68 | 21.92 | 26 | 13.84 | 15.38 | 38.88 | 41.92 |
| 12 | 4.40 | 5.23 | 21.03 | 23.34 | 27 | 14.57 | 16.15 | 40.11 | 43.19 |
| 13 | 5.01 | 5.89 | 22.36 | 27.74 | 28 | 15.31 | 16.93 | 41.34 | 44.46 |
| 14 | 5.63 | 6.57 | 23.68 | 26.12 | 29 | 16.05 | 17.71 | 42.56 | 45.72 |
| 15 | 6.26 | 7.26 | 25.00 | 27.49 | 30 | 16.79 | 18.49 | 43.77 | 46.98 |

Tabell 5: Percentiles of the F distribution with r and s degrees of freedom [e.g., $F_{F_{8,20}}(2.45) = 0.95$]

| s | 2.5 % percentile | | | | | | | | |
|-----|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | $r = 2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 0.026 | 0.062 | 0.094 | 0.119 | 0.138 | 0.153 | 0.165 | 0.175 | 0.183 |
| 3 | 0.026 | 0.065 | 0.100 | 0.129 | 0.152 | 0.170 | 0.185 | 0.197 | 0.207 |
| 4 | 0.025 | 0.066 | 0.104 | 0.135 | 0.161 | 0.181 | 0.198 | 0.212 | 0.224 |
| 5 | 0.025 | 0.067 | 0.107 | 0.140 | 0.167 | 0.189 | 0.208 | 0.223 | 0.236 |
| 6 | 0.025 | 0.068 | 0.109 | 0.143 | 0.172 | 0.195 | 0.215 | 0.231 | 0.246 |
| 7 | 0.025 | 0.068 | 0.110 | 0.146 | 0.176 | 0.200 | 0.221 | 0.238 | 0.253 |
| 8 | 0.025 | 0.069 | 0.111 | 0.148 | 0.179 | 0.204 | 0.226 | 0.244 | 0.259 |
| 9 | 0.025 | 0.069 | 0.112 | 0.150 | 0.181 | 0.207 | 0.230 | 0.248 | 0.265 |
| 10 | 0.025 | 0.069 | 0.113 | 0.151 | 0.183 | 0.210 | 0.233 | 0.252 | 0.269 |
| 12 | 0.025 | 0.070 | 0.114 | 0.153 | 0.186 | 0.214 | 0.238 | 0.259 | 0.276 |
| 15 | 0.025 | 0.070 | 0.116 | 0.156 | 0.190 | 0.219 | 0.244 | 0.265 | 0.284 |
| 16 | 0.025 | 0.070 | 0.116 | 0.156 | 0.191 | 0.220 | 0.245 | 0.267 | 0.286 |
| 18 | 0.025 | 0.070 | 0.116 | 0.157 | 0.192 | 0.222 | 0.248 | 0.270 | 0.290 |
| 20 | 0.025 | 0.071 | 0.117 | 0.158 | 0.193 | 0.224 | 0.250 | 0.273 | 0.293 |
| 21 | 0.025 | 0.071 | 0.117 | 0.158 | 0.194 | 0.225 | 0.251 | 0.274 | 0.294 |
| 24 | 0.025 | 0.071 | 0.117 | 0.159 | 0.195 | 0.227 | 0.253 | 0.277 | 0.297 |
| 25 | 0.025 | 0.071 | 0.118 | 0.160 | 0.196 | 0.227 | 0.254 | 0.278 | 0.298 |
| 27 | 0.025 | 0.071 | 0.118 | 0.160 | 0.197 | 0.228 | 0.255 | 0.279 | 0.300 |
| 28 | 0.025 | 0.071 | 0.118 | 0.160 | 0.197 | 0.228 | 0.256 | 0.280 | 0.301 |
| 30 | 0.025 | 0.071 | 0.118 | 0.161 | 0.197 | 0.229 | 0.257 | 0.281 | 0.302 |

| s | 95 % percentile | | | | | | | | |
|-----|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | $r = 2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 | 19.40 |
| 3 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 |
| 4 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 |
| 5 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 |
| 6 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 |
| 7 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 |
| 8 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 |
| 9 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 |
| 10 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 |
| 12 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 |
| 15 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 |
| 16 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 |
| 18 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 |
| 20 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 |
| 21 | 3.47 | 3.07 | 2.84 | 2.68 | 2.57 | 2.49 | 2.42 | 2.37 | 2.32 |
| 24 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 |
| 25 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 | 2.24 |
| 27 | 3.35 | 2.96 | 2.73 | 2.57 | 2.46 | 2.37 | 2.31 | 2.25 | 2.20 |
| 28 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 |
| 30 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 |

| s | 97.5 % percentile | | | | | | | | |
|-----|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | $r = 2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 39.00 | 39.17 | 39.25 | 39.30 | 39.33 | 39.36 | 39.37 | 39.39 | 39.40 |
| 3 | 16.04 | 15.44 | 15.10 | 14.88 | 14.73 | 14.62 | 14.54 | 14.47 | 14.42 |
| 4 | 10.65 | 9.98 | 9.60 | 9.36 | 9.20 | 9.07 | 8.98 | 8.90 | 8.84 |
| 5 | 8.43 | 7.76 | 7.39 | 7.15 | 6.98 | 6.85 | 6.76 | 6.68 | 6.62 |
| 6 | 7.26 | 6.60 | 6.23 | 5.99 | 5.82 | 5.70 | 5.60 | 5.52 | 5.46 |
| 7 | 6.54 | 5.89 | 5.52 | 5.29 | 5.12 | 4.99 | 4.90 | 4.82 | 4.76 |
| 8 | 6.06 | 5.42 | 5.05 | 4.82 | 4.65 | 4.53 | 4.43 | 4.36 | 4.30 |
| 9 | 5.71 | 5.08 | 4.72 | 4.48 | 4.32 | 4.20 | 4.10 | 4.03 | 3.96 |
| 10 | 5.46 | 4.83 | 4.47 | 4.24 | 4.07 | 3.95 | 3.85 | 3.78 | 3.72 |
| 12 | 5.10 | 4.47 | 4.12 | 3.89 | 3.73 | 3.61 | 3.51 | 3.44 | 3.37 |
| 15 | 4.77 | 4.15 | 3.80 | 3.58 | 3.41 | 3.29 | 3.20 | 3.12 | 3.06 |
| 16 | 4.69 | 4.08 | 3.73 | 3.50 | 3.34 | 3.22 | 3.12 | 3.05 | 2.99 |
| 18 | 4.56 | 3.95 | 3.61 | 3.38 | 3.22 | 3.10 | 3.01 | 2.93 | 2.87 |
| 20 | 4.46 | 3.86 | 3.51 | 3.29 | 3.13 | 3.01 | 2.91 | 2.84 | 2.77 |
| 21 | 4.42 | 3.82 | 3.48 | 3.25 | 3.09 | 2.97 | 2.87 | 2.80 | 2.73 |
| 24 | 4.32 | 3.72 | 3.38 | 3.15 | 2.99 | 2.87 | 2.78 | 2.70 | 2.64 |
| 25 | 4.29 | 3.69 | 3.35 | 3.13 | 2.97 | 2.85 | 2.75 | 2.68 | 2.61 |
| 27 | 4.24 | 3.65 | 3.31 | 3.08 | 2.92 | 2.80 | 2.71 | 2.63 | 2.57 |
| 28 | 4.22 | 3.63 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.55 |
| 30 | 4.18 | 3.59 | 3.25 | 3.03 | 2.87 | 2.75 | 2.65 | 2.57 | 2.51 |

Tabell 6: Critical values c for the Wilcoxon signed rank test, where n is the sample size and $C = n(n + 1) - c$ [e.g., if $n = 20$, then $P(W \leq 61) = P(W \geq 149) \approx 0.05$]

| n | 0.025 | 0.05 | $n(n + 1)/2$ | n | 0.025 | 0.05 | $n(n + 1)/2$ |
|-----|-------|------|--------------|-----|-------|------|--------------|
| 5 | 0 | 1 | 15 | 18 | 41 | 48 | 171 |
| 6 | 1 | 3 | 21 | 19 | 47 | 54 | 190 |
| 7 | 3 | 4 | 28 | 20 | 53 | 61 | 210 |
| 8 | 4 | 6 | 36 | 21 | 59 | 68 | 231 |
| 9 | 6 | 9 | 45 | 22 | 67 | 76 | 253 |
| 10 | 9 | 11 | 55 | 23 | 74 | 84 | 276 |
| 11 | 11 | 14 | 66 | 24 | 82 | 92 | 300 |
| 12 | 14 | 18 | 78 | 25 | 90 | 101 | 325 |
| 13 | 18 | 22 | 91 | 26 | 99 | 111 | 351 |
| 14 | 22 | 26 | 105 | 27 | 108 | 120 | 378 |
| 15 | 26 | 31 | 120 | 28 | 117 | 131 | 406 |
| 16 | 30 | 36 | 136 | 29 | 127 | 141 | 435 |
| 17 | 35 | 42 | 153 | 30 | 138 | 152 | 465 |

Tabell 7: Critical values c for the Wilcoxon rank sum test, where m is the size of the smaller sample, and $C = m(m + n + 1) - c$ [e.g., if $m = 4$ and $n = 8$, then $P(W \leq 16) = P(W \geq 36) \approx 0.05$]

| n | $P(W \leq c)$ | $m = 2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|-----|---------------|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 2 | 0.025 | 3 | | | | | | | | | |
| | 0.05 | 3 | | | | | | | | | |
| 3 | 0.025 | 3 | 3 | | | | | | | | |
| | 0.05 | 6 | 7 | | | | | | | | |
| 4 | 0.025 | 3 | 6 | 11 | | | | | | | |
| | 0.05 | 3 | 7 | 12 | | | | | | | |
| 5 | 0.025 | 3 | 7 | 12 | 18 | | | | | | |
| | 0.05 | 4 | 8 | 13 | 20 | | | | | | |
| 6 | 0.025 | 3 | 8 | 13 | 19 | 27 | | | | | |
| | 0.05 | 4 | 9 | 14 | 21 | 29 | | | | | |
| 7 | 0.025 | 3 | 8 | 14 | 21 | 28 | 37 | | | | |
| | 0.05 | 4 | 9 | 15 | 22 | 30 | 40 | | | | |
| 8 | 0.025 | 4 | 9 | 15 | 22 | 30 | 39 | 50 | | | |
| | 0.05 | 5 | 10 | 16 | 24 | 32 | 42 | 52 | | | |
| 9 | 0.025 | 4 | 9 | 15 | 23 | 32 | 41 | 52 | 63 | | |
| | 0.05 | 5 | 11 | 17 | 25 | 34 | 44 | 55 | 67 | | |
| 10 | 0.025 | 4 | 10 | 16 | 24 | 33 | 43 | 54 | 66 | 79 | |
| | 0.05 | 5 | 11 | 18 | 27 | 36 | 46 | 57 | 70 | 83 | |
| 11 | 0.025 | 5 | 10 | 17 | 25 | 35 | 45 | 56 | 69 | 82 | 97 |
| | 0.05 | 5 | 12 | 19 | 28 | 38 | 48 | 60 | 73 | 87 | 101 |