Föreläsning 4/10

Mer om Centrala gränsvärdessatsen

Centrala gränsvärdessatsen säger att om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är ett stickprov från någon fördelning (vilken som helst!) med väntevärde μ och varians σ^2 så gäller att

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Detta betyder att ju större stickprov vi har (dvs ju större n är) desto mer normalfördelad är $\bar{X}$.

Ex: Tärningsexemplet igen. Om $n=1$ så har vi bara en likformig fördelning. Om vi ökar n så ser fördelningen mer och mer ut som en normalfördelning.

PLOT

Observera även att variansen för $\bar{X}$ är $\frac{\sigma^2}{n}$. Det innebär bland annat att variansen minskar om vi har ett stort stickprov. Ju större stickprov vi har desto säkrare är vi på att vår punktskattning $\bar{X}$ är bra! Detta reflekteras även i hur konfidensintervallen ~~???~~ beror på n.

Kom ihåg:

$$L = \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$U = \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Ju större n är desto närmre varandra är L och U, desto mindre blir intervallet!

PLOT

(2) ~~Konfidensintervall för väntevärde när variansen är känd~~ (Ka

Hittills har vi antagit att variansen är känd när vi gjort konfidensintervall. Det är inte alltid realistiskt. Hur gör vi när variansen är okänd? Om stickprovet är stort nog byter vi bara ut σ^2 mot s^2 i formlerna. Kom ihåg att $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-\bar{x})^2$ är vår punktskattare för σ^2. Vi får då

$$L = \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad , \quad U = \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Observera att detta bara gäller om n är stort nog ($n \geq 30$). Vad gör vi annars?

<u>Konfidensintervall när variansen okänd – t-fördelningen.</u>

Om n inte är stort nog så kommer s^2 inte att vara en bra nog skattare för σ^2. Istället för att använda oss av normalfördelningen ($z_{\frac{\alpha}{2}}$-värdena) så måste vi använd oss av <u>t-fördelningen</u>. t-fördelningen har en parameter som kallas för <u>frihetsgrader</u> (degrees of freedom, df). Om antalet frihetsgrader är stort så är t-fördelningen väldigt lik $N(0,1)$. PLOT.

Konfidensintervall ges i dessa fall av

$$L = \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad , \quad U = \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

där $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ är sådan att $P(T_{n-1} > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = \frac{\alpha}{2}$ när T_{n-1} är t-fördelad med $n-1$ frihetsgrader.

Övning 33a: Vi har ett stickprov från en normalfördelning:

4, 6, 3, 5, 9, 3. Konstruera ett 90% konfidensintervall för väntevärdet μ.

Lösning: Vad behöver vi? $n=6$

$$l = \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad , \quad u = \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6} \cdot (4+6+3+5+9+3) = \frac{30}{6} = 5$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2 = \frac{1}{5}\left((5-4)^2 + (5-6)^2 + (5-3)^2 + (5-5)^2 + (5-9)^2 + (5-3)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2 + 2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}(1+1+4+0+16+4) = \frac{26}{5} = 5.2$$

$$\alpha = 0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = t_{0.05, 5} = 2.015$$

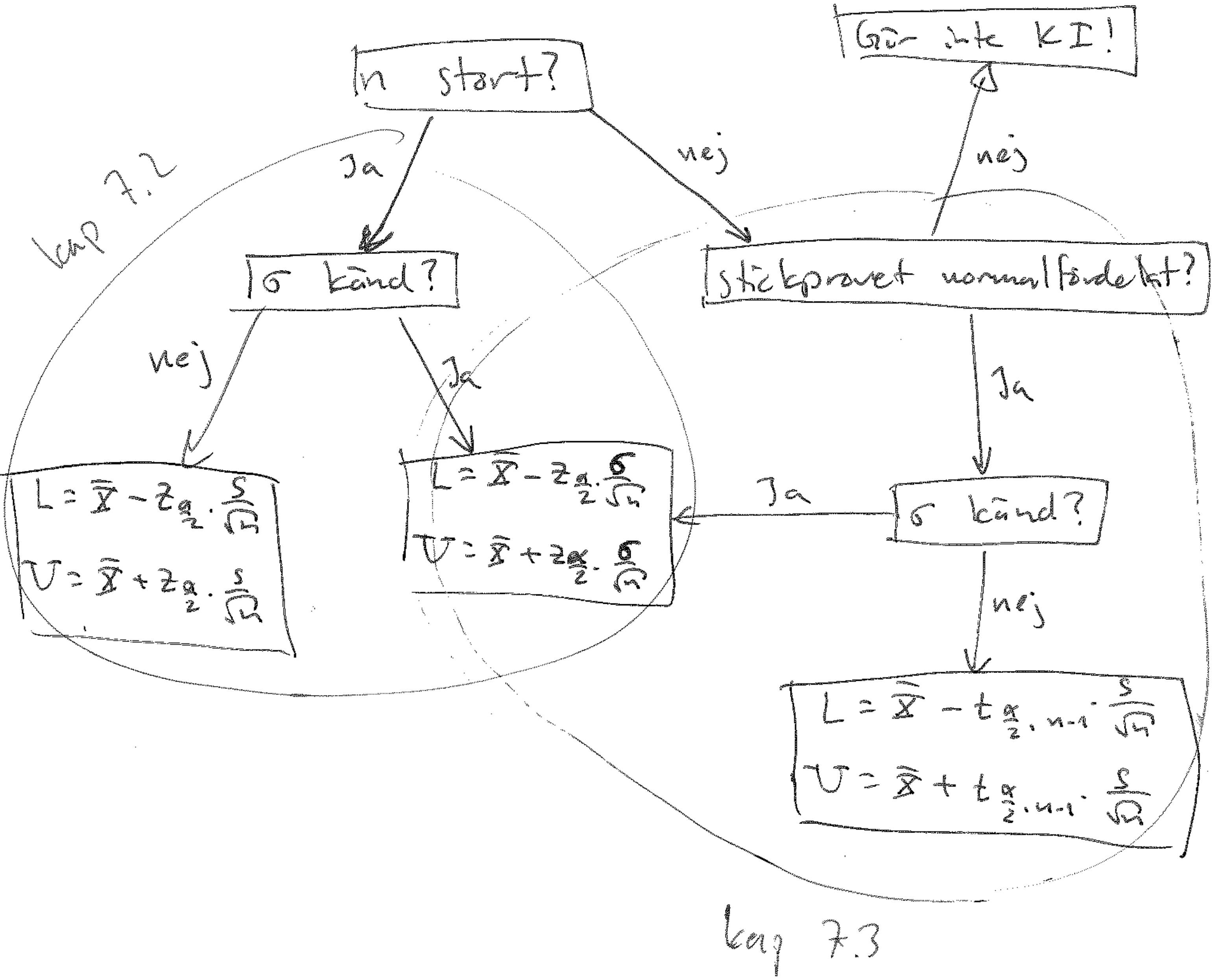
Vi får alltså

$$l = \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = 5 - 2.015 \frac{\sqrt{5.2}}{\sqrt{6}} = 3.1241$$

$$u = \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} = 5 + 2.015 \cdot \frac{\sqrt{5.2}}{\sqrt{6}} = 6.8759$$

SVAR: $KI = [3.1241; 6.8759]$

Observera att ~~[illegible]~~ denna procedur bara fungerar om stickprovet är normalfördelat.


n stort?
Ja
nej
Gör inte KI!
nej
kap 7.2
σ känd?
Stickprovet normalfördelat?
nej
Ja
Ja
$L = \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
$U = \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
$L = \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
$U = \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Ja
σ känd?
nej
$L = \bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
$U = \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
kap 7.3