Föreläsning 5/10

Konfidensintervall för proportion (kap. 7.4)

Hittills har vi bara pratat om hur man gör konfidensintervall för ett väntevärde μ. Som sagts tidigare kan man göra konfidensintervall för andra parametrar också, t ex för variansen (ingår ej i kursen, ~~men~~ står i kap. 7.6) och proportioner.

Exempel 6 (sida 332): 1 000 amerikanska medborgare tillfrågas om dom känner att dom kan lita på presidenten. 637 svarar ja. Vi är intresserade i den riktiga proportionen p av alla amerikaner som litar på presidenten. Vår punktskattning blir naturligtvis

$$\hat{p} = \frac{637}{1000} = 0.637$$

~~Hur bra tror vi att denna skattning~~

Hur säkra är vi på att denna skattning är bra?

Hur gör vi ett konfidensintervall av detta?

Exemplet ovan kan ses som en binomialfördelning. Vi gör $n = 1000$ försök och vi "lyckas" 637 gånger. Vi söker den riktiga proportionen p. Till hjälp har vi $\hat{p}$. Även här har vi hjälp av centrala gränsvärdessatsen.

Tidigare: $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Här: $\hat{p} \approx N(p, \frac{p(1-p)}{n})$

Observera att variansen är $\frac{p(1-p)}{n}$ och att vi inte vet p. Vi använder istället $\hat{p}$ och skattar variansen med $\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}$.

Med denna motivering skapar vi konfidensintervall för proportionen p på följande vis.

$$L = \hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$U = \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Även detta bygger på centrala gränsvärdessatsen så vi gör bara så här om n är stort. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Här vill vi att både $n\hat{p}$ och $n(1-\hat{p})$ ~~[illegible]~~ ska vara åtminstone 15.

Ex: Åter till exempel 6 med ~~[illegible]~~ de amerikanska folkets förtroende för presidenten. Eftersom $\hat{p}=0.637$ så ges ett 95%-igt konfidensintervall för p av

$$l = 0.637 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.637 \cdot (1-0.637)}{1000}} = 0.607$$

$$u = 0.637 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.637 \cdot (1-0.637)}{1000}} = 0.667$$

Övning 52: Ett stickprov av storlek $n=144$ resulterade i $\hat{p}=0.76$.

(a) Är stickprovsstorleken stor nog för att vi ska kunna ~~[illegible]~~ skapa ett konfidensintervall med metoderna i detta kapitel?

(b) Skapa ett 90%-igt konfidensintervall för p.

(c) Vilka antaganden är nödvändiga för att KI ska vara ok?

Lösning: (a) Enligt riktlinjerna i detta kapitel så vill vi att $n \cdot \hat{p} \geq 15$ och att $n \cdot (1-\hat{p}) \geq 15$.

Vi har här att $n \cdot \hat{p} = 144 \cdot 0.76 = 109.44$

och att $n \cdot (1-\hat{p}) = 144 \cdot 0.24 = 34.56$

Alltså är stickprovet stort nog!

(b) Vi har att $n = 144$ och att $\hat{p} = 0.76$, $\alpha = 0.1$.

Det enda vi saknar är $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05}$.

Vi tittar i tabellerna och ser att $z_{0.05} = 1.645$.

Vi får alltså att

$$l = 0.76 - 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.76 \cdot (1-0.76)}{144}} = 0.76 - 0.0585 = 0.7015$$

$$u = 0.76 + 0.0585 = 0.8185$$

Vårt observerade konfidensintervall är alltså

$$[0.7015; 0.8185]$$

(c) Enligt den tredje blå rutan på sida 333 så måste det gälla att

1. Stickprovet är taget från den relevanta populationen.

och

2. n är stort nog.

Punkt 2 har vi redan undersökt i (a)-uppgiften.

Punkt 1 måste vi anta är sant! Vi får ingen info om detta i uppgiften. Kommentera!

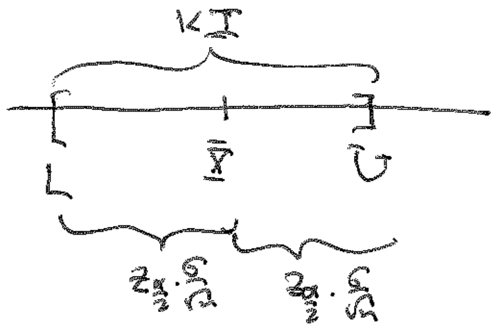
Disclaimer: Inte samma notation i boken.

Bestämning av stickprovsstorleken (kap. 7.5)

Ibland när man gör statistiska undersökningar om en parameter har man i förväg ett hum om hur stort "fel" man kan acceptera. Man kan t.ex. få i uppgift att skapa ett KI som skattar μ inom 0.3. Kom ihåg KI för μ:

$$L = \bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$U = \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



Avståndet mellan $\bar{X}$ och L (eller U) är alltså $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ och kallas för ~~[illegible]~~ sample error, SE.

Kom ihåg att längden på ett KI beror på n. PLOT

Det är sample error som ändras med n.

Om man, som ovan, vill skatta μ inom 0.3 med ett 95% KI så vill vi att sample error ska vara 0.3. Vi måste då öka stickprovsstorleken tills detta uppfylls.

Vi vill: $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.3 \Rightarrow n = \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \sigma^2}{0.3^2}$

Blå ruta på sida 340.