Föreläsning 10/10

Hypotestest för väntevärden

När vi förra veckan studerade konfidensintervall så hade vi en okänd parameter, t.ex. μ, som vi ville veta något om. Om man redan innan undersökningen har någon gissning ~~om~~ på vad parametern kan ha för värde så kan man göra ett hypotestest. Man ställer då upp en nollhypotes, betecknad med H_0, och en alternativhypotes, betecknad med H_1, eller H_a (boken)

Exempel: ~~På 50-talet~~ 1950 var medellängden bland svenska 19-åriga män 175 cm. Nu vill vi undersöka om detta har ändrats. Om vi låter μ beteckna det riktiga ~~medelvärde~~ medellängden bland dagens 19-åriga svenska män så blir våra hypoteser:

$$H_0: \mu = 175$$
$$H_1: \mu \neq 175$$

Nu vill vi samla data för att avgöra om H_0 fortfarande stämmer. I exemplet ovan är det ett ~~[illegible]~~ väntevärde vi undersöker så vi använder oss av stickprovsmedelvärdet $\bar{X}$. Om det observerade stickprovsmedelvärdet $\bar{x}$ är "för långt ifrån" 175 så tror vi inte längre på H_0. Vi säger då att vi förkastar H_0.

②

För att göra testet formellt måste vi precisera vad vi menar med "för långt ifrån". Tankegång: Om H_0 är sann, hur ovanliga är våra observationer?

~~För att svara på detta, anta att populationen är normalfördelad (eller att n är stort nog) att H_0 är sann och att standardavvikelsen σ är känd.~~

För att svara på detta så antar vi att

→ Populationen är normalfördelad eller att n är stort nog för att använda centrala gränsvärdessatsen

→ Standardavvikelsen σ är känd (i detta fall σ=7)

→ H_0 är sann, alltså $\mu = 175$

Nu vet vi att stickprovsmedelvärdet är normalfördelat:

$$\bar{X} \sim N\left(175, \frac{7^2}{n}\right)$$

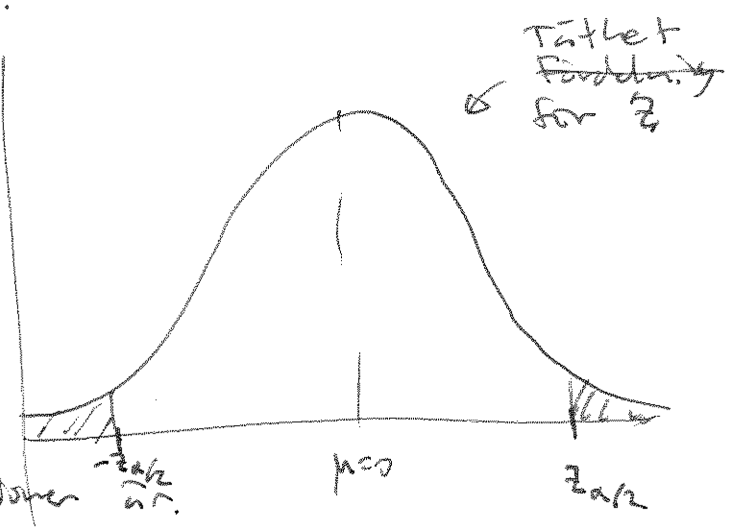
Om vi nu skapar slumpvariabeln $Z = \dfrac{\bar{X} - 175}{7/\sqrt{n}}$

så gäller att $Z \sim N(0,1)$

(se blå ruta högst upp på sida 244)

Här kallar vi Z för <u>teststatistikan</u> och vi vet dess fördelning!

Den generella formeln för teststatistikan när σ är känd är $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. Nu kan vi ta fram vår observerade teststatistika $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ och jämföra med normalfördelningstabellerna för att se hur ovanliga våra observationer är.



Precis som när vi gör konfidensintervall så bestämmer vi oss för en signifikansnivå α redan innan testet. Det är även samma värden på α som brukar väljas, $\alpha=0.01$, $\alpha=0.05$ och $\alpha=0.1$.

Vi jämför vår observerade teststatistika $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ med våra z-värden ~~1.96 och 1.96. Eller [illegible]~~

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ och $-z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.96$. om $\alpha=0.05$.

~~När vi gör hypotestest kallas $z_{\frac{\alpha}{2}}$ och $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ för kritiska värden.~~

Om $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ hamnar utanför intervallet $[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}]$ så anser vi att observationerna, dvs stickprovet, är för osannolika och vi förkastar då H_0.

Värdena $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ och $z_{\frac{\alpha}{2}}$ kallas här för <u>kritiska värden</u> och regionen utanför intervallet $[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}]$ kallas för <u>kritisk region</u>.

Exempel: Forts. på förra exemplet. $\alpha=0.05$ Vi mäter längden på 100 slumpmässigt utvalda 19-åriga svenska män och ~~[illegible]~~ ser att $\bar{x}=179.7$. Vi tar fram teststatistikan:

$$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{179.7-175}{7/\sqrt{100}} = 6.7$$

Eftersom $6.7 > z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ så förkastar vi H_0. Alltså kan vi utesluta att medellängden bland dagens svenska 19-åriga män inte är 175 cm.

Den alternativa hypotesen H_1 kallas även ibland för arbetshypotes. Det är H_1 man vill statistiskt bevisa är sann. Idén med hypotestest är att ~~bevisa~~ statistiskt säkerställa att H_1 är sann genom att ~~bevisa~~ statistiskt säkerställa att H_0 är falsk.

Ensidiga test

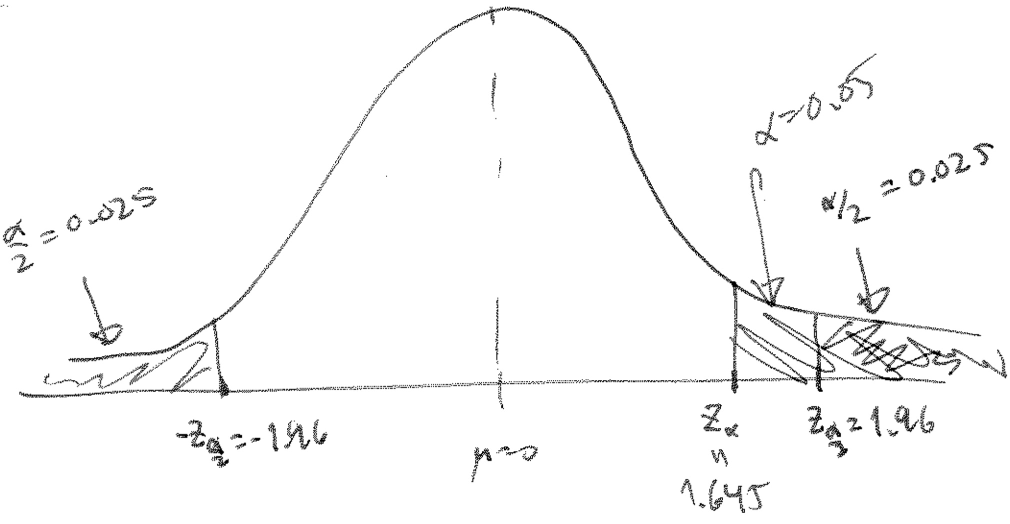
Ibland är man inte intresserad av vilken förändring som helst utan man vill veta om parametern ökat (eller minskat). Man kan då göra ett ensidigt test. I exemplet tidigare kan det kanske vara rimligt att anta att en ökning av medellängden har skett. (redan innan vi sett datan)

Våra hypoteser blir då:

$$H_0 : \mu = 175 \qquad \text{eller} \qquad H_0 : \mu \leq 175$$
$$H_1 : \mu > 175 \qquad \qquad \qquad H_1 : \mu > 175$$

På samma sätt som tidigare använder man test-statistikan $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ men nu har vi bara ett kritiskt värde.

Om H_0 är sann så skulle "för små" värden på z bara vara normalt. Därför bryr vi oss bara om z blir "för stort"; vi jämför bara med ett kritiskt värde.



Observera att om vi inte förkastar H_0 när vi gör ett hypotestest så betyder det inte att H_0 är sann. Det betyder bara att vi inte kunde statistiskt motbevisa att H_0 är sann med våra observerade data. Om t. ex. ett riktigt väntevärde är $\mu = 10.3$ och vi ställer upp hypoteserna

$$H_0: \mu = 10 \quad , \quad H_1: \mu \neq 10$$

så krävs det antingen extremt liten varians eller extremt stort stickprov för att förkasta H_0, trots att H_0 inte är sann.