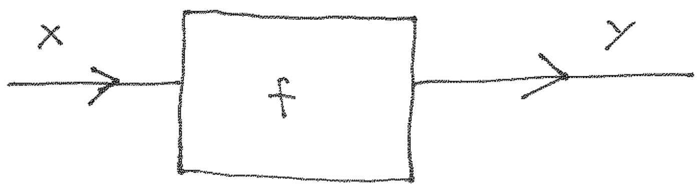
MVE490 $\boxed{\text{FO}}$ ①

En funktion är (intuitivt) en svart låda som för varje in-värde x spottar ut ett ut-värde y.



Man skriver ofta $y=f(x)$.

<u>Ex 1:</u> Under tre veckor registrerades åtgången av cement i ett bygge

"Bild cement"

Detta är ett exempel på en <u>diskret</u> funktion. Här finns 21 in-data punkter $x_1, x_2, \dots, x_{21}$. T. ex. är $x_1 = 1$ och $f(x_1) = 1275$, $f(6) = 0$, $f(16) = 6523$ e.t.c.

<u>Ex 2:</u> Positionen som funktion av tid för en startande raket betraktas.

"Bild Raket 1"

Här är t = tid och $y = f(t)$ = position. $\boxed{FO}$ 2

<u>Ex 3:</u> In-data(x) är kort från en kortlek. Ut-data är färgen på kortet.

Om x = spader 5 $\Rightarrow$ $y = f(x)$ = spader

om x = ruter K $\Rightarrow$ $y = f(x)$ = ruter.

<u>OBS:</u> Ex 3 visar att in/ut-data <u>ej</u> behöver vara tal.

Våra exempel ger upphov till några naturliga frågor:

<u>Ex 1:</u> Hur mycket cement gick åt under vecka 1? v2? v3? Hur mycket totalt?

Detta klarar vi lätt genom summering.

<u>Ex 2:</u> Vilken genomsnittlig hastighet håller raketen under de första 20 sekunderna?

$$\text{Hastighet} = \frac{\text{sträcka}}{\text{tid}} = \frac{1600}{20} = 80 \text{ m/s}$$

"/Bild Raket 3/"

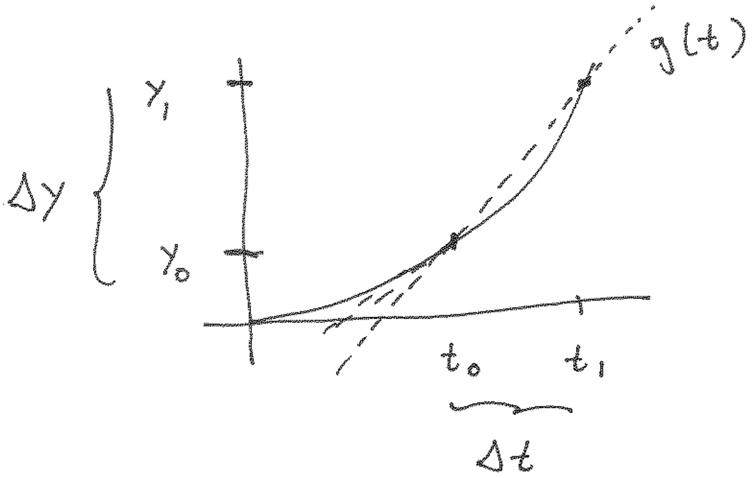
FO 3

Hur gör vi om vi vill ha genomsnittliga hastigheten de 10 första sekunderna? De 10 sista?

"Bild Rocket2, Rocket3"

$$V = \frac{\text{sträcka}}{\text{tid}} = \frac{1200}{10} = 120 \text{ m/s}$$

Genomsnittshastigheten ges av $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}$



Betrakta nu $y = k(t - t_0) + y_0 = f(t)$ där $k = \frac{\Delta y}{\Delta t}$

Vi har att $g(t_0) = k \cdot 0 + y_0 = y_0$ och $g(t_1)$

$$= k(t_1 - t_0) + y_0 = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(t_1 - t_0) + y_0 = y_1 .$$

Lutningen k för funktionen g(t) beskriver alltså genomsnittshastigheten.

FO ④

Om vi låter $t_0 = 10$ och $t_1 = 20, 18, 16, \ldots$ (dvs minska mot t_0) så hittar vi g-hast. för kortare och kortare tidsintervall efter tiden 10.

Om t_1 är mkt nära t_0 får vi den ungefärliga hastigheten vid tiden t_0.

D.v.s.

$$\text{hastigh. vid } t_0 = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} = f'(t_0)$$

derivatan av $f(t)$ vid tiden t_0.

"Visa lutningsbilder"

Avläsning ger $f'(t_0) = 80$.

⌈Här är $f(t) = 4t^2 \Rightarrow f'(t) = 8t$⌋

Deriveringsregler måste bevisas, men några exempel är:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^n
konst.	0
$\sin(x)$	$\cos(x)$
e^x	e^x
$e^{\alpha x}$	$\alpha e^{\alpha x}$
$\vdots$	$\vdots$

Ex 4: Här betraktar vi en graf

för $t =$ tid mot $y = f(t) =$ hastighet

"Bilder speed1"

Stapeln mellan $t = \frac{1}{2}$ och $t = 1$ ger en

underskattning av sträckan färdad.

(dvs $0.32 \ m/s \cdot \frac{1}{2} s = 0.16 \ m$)

Hastigheten för varje t mellan $\frac{1}{2}$ och 1

är minst $0.32 \ m/s$.

Genom att summera arean av staplarna

kan vi approximativt beräkna sträckan

vi färdats.

Ju finare indelning desto bättre

approximation.

"Bilder speed2, speed3"

Man kan visa att sträckan färdad

= area under grafen.

Hur kan arean beräknas?

Kom ihåg (ex2) hastighet = derivata av sträckan som fkn av tid

Om hastigheten ges av $f(t)=2t$ $\boxed{\text{FO}}$ 6

beräknar vi sträckan färdad ~~som~~ genom att hitta den funktion vars derivata är $2t$:

$$\int_0^5 2t\,dt = \Big[t^2\Big]_0^5 = 5^2 - 0^2 = 25$$

dvs 25 meter. // FO 2017 slut

Ex 5: "Fondbluffen"

En aktivt ~~förhandlad~~ förvaltad fond skryter om att de enbart tar 2 % i avgift.

Om avkastningen är 5 % varje år i 30 år. Hur mycket ger vi då bort?

Ingen avgift: ~~$1.05 \cdot 30$~~

$$\underbrace{100}_{\text{start}} \cdot 1.05 = 105 \quad \text{efter 1 år}$$

$$100 \cdot 1.05 \cdot 1.05 = 100 \cdot 1.05^2 = 110.25 \quad \text{efter 2 år}$$

$\vdots$

$$100 \cdot 1.05^{30} \approx 432{,}2$$

med avgift: $\boxed{\text{FO}}$

$$100 \cdot 1.03^{30} \approx 242.7$$

Hur mycket har då banken stulit?

$$\frac{432.2 - 242.7}{432.2} \approx 43.8\ \%$$

Hur mycket av vinsten har de stulit?

$$\frac{332.2 - 142.7}{332.2} \approx 57.04\ \%$$