Lite summor och gränsvärden

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{(kort notation)}$$

Bra egenskap:

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot x_k = cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n = c\,(x_1 + \cdots + x_n) = c \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Vanliga fall:
i) $x_k = k$
ii) $x_k = k^2$
iii) $x_k = a^k$ för ngt $a > 0$.

<u>OBS:</u> k måste inte börja på 1. Dvs vi har

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_n \quad \text{&} \quad \sum_{k=-n}^{n} x_k = x_{-n} + x_{-n+1} + \cdots + x_n$$

Då summan $\sum_{k=1}^{n} k$ förekommer ofta är det smidigt att ha ett specifikt uttryck.

Vi har

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

<u>B:</u> Antag först att n är jämnt.

Betrakta

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) + \cdots (n-1) + n$$

$$= (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots + \left(\frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\right)$$

$$= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{\frac{n}{2}\text{ ggr}} = (n+1) \cdot \frac{n}{2} \quad //$$

Antag n udda. <u>Lämnas som övning!</u> $\square$

Låt oss försöka hitta ett bra uttryck för

$\sum_{k=0}^{n} a^k$. Låt $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$. Idé: "S_n o aS_n

är ungefär samma."

$$aS_n = a\sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{k=0}^{n} a\cdot a^k = \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} = a^1 + a^2 + \cdots + a^{n+1}$$

$$= (1 + a + a^2 + \cdots + a^n) + a^{n+1} - 1 = S_n + a^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow \quad aS_n - S_n = a^{n+1} - 1 \quad \Rightarrow \quad S_n(a-1) = a^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad \text{om } a \neq 1.$$

Dvs $\boxed{\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ för } a \neq 1}$

~~Några gränsvärden~~

Tal: (Annuitet) Anden i flaskan Emil är odödlig och bor i en värld där årräntan R är fixt för all framtid.

Banken Q skriver ett kontrakt med Emil där de ger honom 100 \$ ~~guldpengar~~ i ~~början~~ slutet av varje år. Hur mycket bör Emil betala för detta kontrakt?

L: ~~Ett~~ Värdet av 100 \$ efter ett år är $\frac{100}{1+R}$ \$. Värdet efter k år är $\frac{100}{(1+R)^k}$. Efter n år är värdet på pengarna som Emil mottagit

$$\frac{100}{1+R} + \frac{100}{(1+R)^2} + \cdots + \frac{100}{(1+R)^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{100}{(1+R)^k}$$

$$= \frac{100}{1+R}\left(1 + \frac{1}{1+R} + \cdots + \frac{1}{(1+R)^{n-1}}\right) = \frac{100}{1+R}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(1+R)^k}$$

$$= \frac{100}{1+R} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+R}\right)^n - 1}{\frac{1}{1+R} - 1} = \frac{100\left(\left(\frac{1}{1+R}\right)^n - 1\right)}{1 - 1 - R} = \frac{100}{R}\left(1 - \left(\frac{1}{1+R}\right)^n\right).$$

$n = \infty$?

Lite gränsvärden.

Låt $a_1, a_2, \ldots$ vara en ∞ sekvens av tal.

Vi säger att $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ om skillnaden mellan a_n och A försvinner då $n \to \infty$.

Ex 1: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}, \ldots, a_n = \frac{1}{2^n}, \ldots$

Om $A = 0$ har vi att

$$|a_n - A| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ex 2: Låt $|a| < 1$ och $b_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$.

Om $B = \frac{1}{1-a}$ så får vi att

$$|b_n - B| = \left| \frac{a^{n+1}-1}{a-1} - \frac{1}{1-a} \right| = \left| \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \right|$$

$$= \frac{|-a^{n+1}|}{1-a} = \frac{|a|^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dvs $\sum_{k=0}^{n} a^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-a}$ om $|a|<1$.

Tal (forts): Låt $a_n = \frac{100}{R}\left(1-\left(\frac{1}{1+R}\right)^n\right)$ och

$A = \frac{100}{R} \Rightarrow |a_n - A| = \left| \frac{100}{R}\left(1-\left(\frac{1}{1+R}\right)^n\right) - \frac{100}{R} \right|$

$$= \frac{100}{R}\left(\frac{1}{1+R}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Dvs värdet på Emils kontrakt är $\frac{100}{R}$.

Sannolikhetsteori

Grundläggande modell:

Ett (slumpmässigt) experiment genomförs.

b) Mängden av alla möjliga utfall kallas för

! utfallsrummet (sample space) och betecknas

S (alt. Ω).

a) Ett utfall är en specifik observation av

experimentet.

c) En <u>händelse</u> är en specifik samling av uttall. Dessa betecknas ofta A, B och vi skriver $A \subset S$, $B \subset S$ etc.

<u>Ex 1:</u> Vi kastar en tärning. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$ är händelsen att resultatet är udda.

<u>Ex 2:</u> Vi singlar två slantar. (H = heads, T = tail)

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$. $B = \{HT, TH, TT\}$ är händelsen att vi får minst ett T.

<u>Ex 3:</u> Väntetid (kassan ICA, kundservice, sjukvård etc)

$S = [0, \infty)$ $A = [0, 1]$ är händelsen att väntetiden är ≤ 1.

Symbolen $\mathbb{P}$ (också P) utläses "sannolikheten".

Några räkneregler för $\mathbb{P}$:

i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ för varje händelse $A \subset S$

ii) $\mathbb{P}(S) = 1$ "sann. ngt händer är 1"

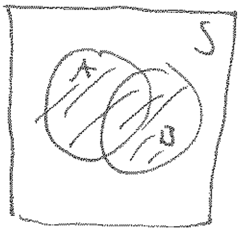
iii) Om A, B är disjunkta (oförenliga)
disjoint (mutually exclusive)

gäller att

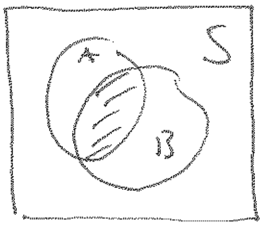
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Lite mängdlära:

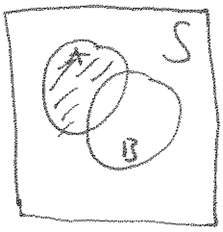
i) $A \cup B$ = "A union ~~eller~~ ~~och~~ B" = $\{s \in S : s \in A \text{ eller } s \in B\}$



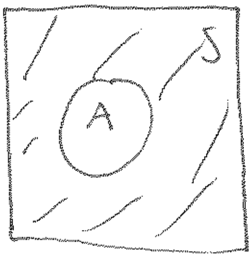
ii) $A \cap B$ = "A snitt B"



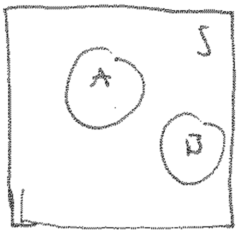
iii) $A \setminus B$ = "A fast inte B"



iv) A^c = "A-komplement"
= "A händer ej"



v) A och B är disjunkta om $A \cap B = \emptyset$



vi) $A \subset B$ om